

**Cálculo simplificado do coeficiente de atrito e do
número de Nusselt em escoamentos laminares de
fluidos não-Newtonianos entre placas paralelas**

Mauro Filipe Soares Mendes

Dissertação do MIEM

Orientadores:

Prof. Paulo José da Silva Martins Coelho

Prof. Manuel António Moreira Alves



Universidade do Porto

Faculdade de Engenharia

FEUP

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

julho 2013

Resumo

Este trabalho teve como objetivo testar uma metodologia para simplificar o cálculo do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares entre placas paralelas de fluidos não-Newtonianos. Os cálculos de transferência de calor foram realizados para os casos de fluxo de calor constante e de temperatura constante na parede da conduta.

A metodologia proposta foi testada para fluidos descritos pelos modelos de Phan-Thien e Tanner simplificado (sPTT), Herschel-Bulkley, Bingham, Casson e Carreau-Yasuda e consistiu na comparação dos resultados obtidos pela aplicação do método simplificado com os respectivos valores exatos.

No caso do coeficiente de atrito, compararam-se os resultados obtidos através de duas expressões muito semelhantes, f'' e f''' , (método simplificado) mas que têm abordagens diferentes na sua génese, com os resultados exatos, obtidos analiticamente para todos os casos à exceção do modelo Carreau-Yasuda. Para este último, como não existem soluções analíticas para o devido efeito, foi necessário recorrer a métodos de integração numérica.

Para o número de Nusselt, os valores obtidos pelo método simplificado, tanto para temperatura constante como para fluxo de calor constante na parede, foram comparados com os resultados exatos, obtidos numericamente para todos os modelos. Devido à sua elevada precisão, os valores numéricos foram mesmo preferidos às soluções analíticas, para os casos em que estas existiam, em virtude do trabalho inerente às pesquisas bibliográficas necessárias realizar para o efeito não contribuir para uma alteração apreciável dos resultados obtidos pela via numérica.

Os desvios máximos obtidos entre f'' e os valores exatos variaram entre 2,06% e 9,30%. Para f''' os erros máximos oscilaram entre 0,97% e 8,42%. Para todos os fluidos, à exceção do modelo Carreau-Yasuda, o erro máximo encontrado através de f''' foi ligeiramente inferior ao obtido através de f'' . No caso do número de Nusselt, para fluxo de calor constante na parede, os valores do erro máximo encontrados variaram entre 1,67% e 5,05%, e para temperatura constante na parede os desvios máximos oscilaram entre 1,30% e 4,57%.

Tanto no estudo do coeficiente de atrito como no do número de Nusselt, os erros máximos mais elevados foram obtidos com o fluido Herschel-Bulkley, contudo, os erros obtidos são perfeitamente aceitáveis na maioria das aplicações de engenharia, o que faz com o método simplificado seja uma boa alternativa a cálculos normalmente mais demorados e que nem sempre estão ao alcance de todos os eventuais interessados.

Simplified calculation of friction factor and Nusselt number in laminar flow between parallel plates of non-Newtonian fluids with constant wall heat flux or constant wall temperature

Abstract

This study aimed to test a methodology for simplifying the calculation of the friction factor and Nusselt number for laminar flow between parallel plates of non-Newtonian fluids. The heat transfer calculations were carried out for constant heat flux and constant wall temperature situations.

This methodology was tested for fluids described by the simplified Phan-Thien and Tanner (sPTT) viscoelastic model, and the Herschel-Bulkley, Bingham, Casson and Carreau-Yasuda generalized Newtonian models, and consisted in comparing the results obtained using the simplified method with the exact values predicted for each rheological model.

For the friction factor, the results obtained from two similar expressions (f'' and f'''), each one with different approaches in their genesis, were compared through the simplified method, with the exact results obtained analytically for all cases except for the Carreau-Yasuda model. For this model, as there are no analytical solutions, it was necessary to resort to numerical integration methods.

Regarding the Nusselt number, the values obtained using the simplified method for constant wall temperature and for constant heat flux at the wall, were compared to the accurate results (taken as exact) obtained numerically for all models. Due to their high accuracy, the numerical values were even preferred to analytical solutions for cases where these exist, due to the inherently laborious literature searches required to obtain the latter, and because it does not contribute to a noticeable change in the results obtained by numerically.

The maximum deviations obtained between f'' and the exact values ranged between 2.06% and 9.30%. For f''' the maximum error ranged between 0.97% and 8.42%. For all fluids except those described by the Carreau-Yasuda model, the maximum error found for f''' was lower than the one found using f'' . Regarding the

Nusselt number for constant heat flux at the wall, the maximum error ranged from 1.67% to 5.05%, and for constant temperature at the wall the maximum deviations varied between 1.30% and 4.57%.

Concerning both the study of the friction factor and the study of the Nusselt number, the highest maximum error was obtained for the Herschel-Bulkley fluid. However, the errors obtained are reasonable for most engineering applications, which makes the simplified method a good alternative to other approaches that are more time consuming, involve more calculations, and are much less straightforward.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer ao Prof. Paulo Coelho por estar sempre presente e disponível para esclarecer todas as minhas dúvidas, acompanhando o meu trabalho passo a passo. Por todo o incentivo e saber transmitido o meu muito obrigado. Quero também agradecer ao Prof. Manuel Alves pela sua ajuda nos processos de integração utilizados neste trabalho e pela sua disponibilidade em ajudar-me sempre que necessário.

Agradeço a todos os meus amigos que conviveram comigo no Porto, pois sem eles não seria nada fácil estar a cerca de 1500 km de distância da minha “terrinha”.

Finalmente, um agradecimento especial à minha querida mãe, Santo Cristo, ao meu “bro”, Nuno Mendes, ao meu avô, Ildeberto, à minha avó, Venilde, e à minha “maria”, Dolores, que de forma direta ou indireta ajudaram-me na realização deste trabalho. Por todo o vosso apoio a todos os níveis, um sincero obrigado.

Índice

Resumo	iii
Abstract.....	v
Agradecimentos	vii
Índice de figuras	xi
Índice de tabelas	xix
Nomenclatura.....	xxi
1 Introdução	1
1.1 Resumo de trabalhos anteriores	1
1.1.1 Modelo lei de potência	1
1.1.2 Metodologia do método simplificado no cálculo de f e Nu	2
1.1.3 Número de Nusselt simplificado para temperatura de parede constante	8
1.2 Justificação do interesse deste trabalho	11
1.3 Classificação dos fluidos	13
1.3.1 Fluido Newtoniano.....	13
1.3.2 Fluido não-Newtoniano.....	14
1.4 Números adimensionais	16
1.4.1 Número de Reynolds	16
1.4.2 Número de Reynolds generalizado	18
1.4.3 Número de Prandtl	19
1.4.4 Número de Péclet	20
1.4.5 Número de Weissenberg	20
1.4.6 Número de Nusselt	21
1.4.7 Número de Bingham	21
1.5 Modelos reológicos.....	21
1.6 Estrutura da dissertação	25
2 Expressões para o coeficiente de atrito e perfis de velocidade.....	27

2.1 Número de Reynolds generalizado e coeficiente de atrito	27
2.2 Soluções analíticas para os perfis de velocidade	30
2.2.1 Fluido Newtoniano	30
2.2.2 Fluido sPTT	32
2.2.3 Fluido Herschel-Bulkley	33
2.2.4 Fluido de Bingham	36
2.2.4 Fluido de Casson	37
2.2.5 Fluido Carreau-Yasuda	38
2.3 Grupos adimensionais	38
3 Coeficiente de atrito obtido pelo método simplificado	39
3.1 Processo de cálculo	39
3.2 Resultados	42
3.2.1 Modelo sPTT	42
3.2.2 Modelo Herschel-Bulkley	45
3.2.3 Modelo de Casson	51
3.2.4 Modelo Carreau-Yasuda	53
3.3 Resumo	56
4 Número de Nusselt obtido pelo método simplificado para fluxo de calor constante na parede.....	59
4.1 Número de Nusselt aproximado, Nu'	59
4.2 Número de Nusselt exato, Nu	60
4.3 Resultados	60
4.3.1 Modelo sPTT	61
4.3.2 Modelo Herschel-Bulkey	63
4.3.3 Modelo de Casson	68
4.3.4 Modelo Carreau-Yasuda	70
4.4 Resumo	73

5 Número de Nusselt obtido pelo método simplificado para temperatura constante na parede.....	75
5.1 Expressão a utilizar no cálculo do número de Nusselt simplificado	75
5.2 Número de Nusselt numérico	76
5.3 Resultados	77
5.3.1 Modelo sPTT.....	77
5.3.2 Modelo Herschel-Bulkley	79
5.3.3 Modelo de Casson	84
5.3.4 Modelo Carreau-Yasuda	86
5.4 Resumo	89
6 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros.....	91
6.1 Conclusões	91
6.1 Sugestões para trabalhos futuros.....	92
Referência Bibliográficas	93
Anexos.....	97
Anexo A: Avaliação dos resultados numéricos do coeficiente de atrito	97
Anexo B: Dedução da expressão do número de Nusselt para fluidos lei de potência 99	
B.1 Expressão de Nu para fluidos lei de potência	99
B.1.1 Equação da energia	99
B.1.2 Integração da equação da energia	102
B.1.3 Expressão a utilizar no cálculo do número de Nusselt simplificado	102
Anexo C: Avaliação dos resultados numéricos do número de Nusselt para fluxo de calor constante na parede	105
Anexo D: Avaliação dos resultados numéricos do número de Nusselt para temperatura constante na parede	107

Índice de figuras

Figura 1-1 - Curva de viscosidade do fluido lei de potência (reta) tangente à curva de um fluido genérico.....	3
Figura 1-2 - Representação gráfica do número de Nusselt para tubos circulares pelo método semi-analítico, \square , e numérico, linha, em função do índice de potência, n	9
Figura 1-3 - Representação gráfica do número de Nusselt para placas paralelas pelo método semi-analítico, \square , e numérico, linha, em função do índice de potência, n	10
Figura 1-4 - Tensão de corte em função da taxa de deformação para os fluidos tixotrópicos e reopéticos.	15
Figura 1-5 - Tensão de corte em função da taxa de deformação dos fluidos totalmente viscosos independentes do tempo e dos fluidos Newtonianos.	16
Figura 1-6 - Representação de placas paralelas com suas cotas.....	17
Figura 2-1 - Representação do desenvolvimento do perfil de velocidade de um fluido Newtoniano ao longo de uma conduta não circular, placas paralelas, sendo a região a) a região de entrada hidrodinâmica e a região b) a região desenvolvida.	31
Figura 2-2 - Representação de dois volumes de controlo, um a linha tracejada e outro a linha contínua, num escoamento completamente desenvolvido ao longo de uma conduta não circular, placas paralelas.....	34
Figura 3-1 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido sPTT. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; \square coeficiente de atrito exato, f	44
Figura 3-2 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido sPTT. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II}	45
Figura 3-3 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; \square coeficiente de atrito exato, f	47
Figura 3-4 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II}	47

- Figura 3-5 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; □ coeficiente de atrito exato, f 48
- Figura 3-6 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II} 49
- Figura 3-7 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; □ coeficiente de atrito exato, f 50
- Figura 3-8 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II} 50
- Figura 3-9 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Casson. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; □ coeficiente de atrito exato, f 52
- Figura 3-10 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Casson. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II} 52
- Figura 3-11 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; □ coeficiente de atrito exato, f 54
- Figura 3-12 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II} 54
- Figura 3-13 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; □ coeficiente de atrito exato, f 55
- Figura 3-14 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II} 56

Figura 3-15 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado. Linha —, coeficiente de atrito simplificado, símbolos (valores exatos): -, Fluido sPTT; □, Fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$; △, Fluido Bingham; ×, Fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$; ✕, Fluido Casson; ○, Fluido Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0 = 0,08$; +, Fluido Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$	58
Figura 4-1 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$ para o fluido sPTT. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	62
Figura 4-2 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido sPTT em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$	63
Figura 4-3 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U}/\tau_0^{1/n} H$ para $n=0,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	64
Figura 4-4 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=0,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U}/\tau_0^{1/n} H$	65
Figura 4-5 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U}/\tau_0^{1/n} H$ para $n=1$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	66
Figura 4-6 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U}/\tau_0^{1/n} H$	66
Figura 4-7 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U}/\tau_0^{1/n} H$ para $n=1,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização..	67
Figura 4-8 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U}/\tau_0^{1/n} H$	68

- Figura 4-9 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\mu_{\infty}\bar{U}/\tau_0 H$ para o fluido Casson. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização. 69
- Figura 4-10 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido Casson em função do grupo adimensional $\mu_{\infty}\bar{U}/\tau_0 H$ 69
- Figura 4-11 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização. 70
- Figura 4-12 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$ em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ 71
- Figura 4-13 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização. 72
- Figura 4-14 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$ em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ 72
- Figura 5-1 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon}\lambda\bar{U}/H$ para o fluido sPTT. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização. 78
- Figura 5-2 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido sPTT em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon}\lambda\bar{U}/H$ 79
- Figura 5-3 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para $n=0,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização. 80

Figura 5-4 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=0,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/2}\bar{U}/\tau_0^{1/2}H$	81
Figura 5-5 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/2}\bar{U}/\tau_0^{1/2}H$ para $n=1$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	82
Figura 5-6 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1$ em função do grupo adimensional $K^{1/2}\bar{U}/\tau_0^{1/2}H$	82
Figura 5-7 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/2}\bar{U}/\tau_0^{1/2}H$ para $n=1,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	83
Figura 5-8 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/2}\bar{U}/\tau_0^{1/2}H$	84
Figura 5-9 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\mu_\infty\bar{U}/\tau_0 H$ para o fluido Casson. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	85
Figura 5-10 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido Casson em função do grupo adimensional $\mu_\infty\bar{U}/\tau_0 H$	85
Figura 5-11 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	86
Figura 5-12 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$ em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$	87
Figura 5-13 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exacto, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.	88

Figura 5-14 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$ em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$	88
Figura A-1 - Diferença entre os valores do coeficiente de atrito em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda com $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$	97
Figura A-2 - Diferença entre os valores do coeficiente de atrito em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda com $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$	98
Figura B-1 - Representação do troço de um escoamento entre placas paralelas para o balanço de energia.	101
Figura C-1 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon}\lambda\bar{U}/H$ para o fluido sPTT.....	105
Figura C-2 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$	105
Figura C-3 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$	106
Figura C-4 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$	106
Figura C-5 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\mu_\infty\bar{U}/\tau_0H$ para o fluido Casson.	106
Figura C-6 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$	106
Figura C-7 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$	106
Figura D-1 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon}\lambda\bar{U}/H$ para o fluido sPTT.....	107
Figura D-2 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$	107
Figura D-3 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$	108
Figura D-4 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$	108

Figura D-5 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\mu_{\infty}\bar{U}/\tau_0 H$ para o fluido Casson.	108
Figura D-6 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$	108
Figura D-7 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$	108

Índice de tabelas

Tabela 1-1 - Expressões para o cálculo de n' para diferentes tipos de fluidos.	6
Tabela 1-2 - Constantes geométricas a^* e b^* , função de $\alpha^* = 2H/B$	19
Tabela 1-3 - Fluidos utilizados e respectivos modelos reológicos.	22
Tabela 1-4 - Representação gráfica de curvas de viscosidade típicas dos fluidos utilizados para o respectivo modelo reológico.	23
Tabela 1-5 - Propriedades características dos fluidos utilizados.	25
Tabela 2-1 - Grupos adimensionais para a representação dos resultados de transferência de calor.	38
Tabela 3-1 - Propriedades reológicas do fluido sPTT utilizado.	43
Tabela 3-2 - Propriedades reológicas dos três fluidos de Herschel-Bulkley utilizados.	46
Tabela 3-3 - Propriedades reológicas do fluido de Casson utilizado.	51
Tabela 3-4 - Propriedades reológicas dos dois fluidos Carreau-Yasuda utilizados.	53
Tabela 3-5 - Resumo dos erros máximos encontrados para o coeficiente de atrito de todos os fluidos estudados.	57
Tabela 4-1 - Resumo dos erros máximos encontrados para o número de Nusselt simplificado, Nu' , para fluxo de calor constante na parede de todos os fluidos estudados.	73
Tabela 5-1 - Resumo dos erros máximos encontrados para o número de Nusselt simplificado, Nu' , para fluxo de calor constante na parede de todos os fluidos estudados.	89

Nomenclatura

A	Área da secção de passagem, [m ²]
a	Parâmetro adimensional do modelo de viscosidade Carreau-Yasuda; parâmetro adimensional, expressões (2.26), (2.29) e (2.34).
a^*	Parâmetro adimensional, expressão (1.29)
a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5	Parâmetros adimensionais, expressão (1.17)
B	Largura das placas, [m]
b^*	Parâmetro adimensional, expressão (1.29)
c	Parâmetro adimensional relacionado com a , $c = \tau_0 / \tau_w$
c_p	Calor específico do fluido, [kJ/kg.K]
D	Diâmetro da conduta circular, [m]
D_H	Diâmetro hidráulico, [m]
f	Coefficiente de atrito de Darcy
f'	Coefficiente de atrito obtido pelo método simplificado
H	Metade da distância entre placas, [m]
h	Coefficiente de convecção, [W/m ² .K]
K	Índice de consistência da lei de potência, [N/m ² .s ⁿ]
k	Condutividade térmica, [W/(m.K)]
L	Comprimento característico, [m]
Nu'	Número de Nusselt obtido pelo método simplificado
N_1	Primeira diferença de tensões normais, [Pa]

n	Índice da lei de potência, expressão (1.1); parâmetro do modelo de Herschel-Bulkley; parâmetro do modelo Carreau-Yasuda
n'	Índice de potência aparente
P	Perímetro molhado, [m]
\dot{q}_w	Fluxo de calor constante na parede, [W/m ²]
R	Raio da conduta circular, [m]
T	Temperatura, [K]
\bar{U}	Velocidade média do escoamento na conduta, [m/s]
\bar{U}_N	Velocidade média para um escoamento de um fluido Newtoniano sujeito ao mesmo gradiente de pressão, [m/s]
U^+	Variável adimensional definida na expressão (2.32)
u	Componente axial da velocidade, [m/s]
v	Componente da velocidade na direção normal à parede, [m/s]
x	Coordenada da direção axial, [m]
y	Coordenada na direção normal medida a partir do plano de simetria da conduta, [m]

Símbolos gregos

α	Difusibilidade térmica, [m ² /s]
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação, [s ⁻¹]
ε	Parâmetro extensional no modelo sPTT
η	Constante de viscosidade associada ao modelo sPTT, [kg/(m.s)]
Λ	Constante de tempo do modelo do modelo Carreau-Yasuda, [s]

λ	Tempo de relaxação do fluido, [s]
μ	Viscosidade de corte, [kg/(m.s)]
μ_0	Viscosidade do primeiro patamar Newtoniano, [kg/(m.s)]
μ_∞	Viscosidade do segundo patamar Newtoniano, [kg/(m.s)]
ν	Viscosidade cinemática, [m ² /s];
ρ	Massa volúmica, [kg/m ³]
τ	Tensão de corte, [N/m ²]
τ_0	Tensão de cedência, [N/m ²]

Grupos adimensionais

Bn	Número de Bingham, $Bn = \frac{\tau_0 D_H}{\bar{U} \mu_\infty}$
Nu	Número de Nusselt, $\frac{h D_H}{k}$
Pe	Número de Péclet, $Pe = \frac{\rho \bar{U} D_H c_p}{k} = \frac{\bar{U} D_H}{\alpha}$
Pr	Número de Prandtl, $Pr = \frac{c_p \mu}{k}$
Re	Número de Reynolds, $Re = \frac{\rho \bar{U} D_H}{\mu}$
Wi	Número de Weissenberg, $Wi = \frac{\lambda \bar{U}}{H}$

Superescritos

<i>I</i>	Relativo à primeira abordagem de cálculo do coeficiente de atrito obtido pelo método simplificado, expressão (3.1)
<i>II</i>	Relativo à segunda abordagem de cálculo do coeficiente de atrito obtido pelo método simplificado, expressão (3.2)
—	Valor médio
*	Variável adimensionalizada

Subscritos

I	Relativo à integração numérica utilizando 3000 pontos
II	Relativo à integração numérica utilizando 6000 pontos
III	Relativo à integração numérica utilizando 12000 pontos
IV	Relativo à integração numérica utilizando 24000 pontos
c	Crítico, expressão (1.27)
g	Generalizado, expressão (1.27)
w	Relativo à parede da conduta
0	Referente a propriedades médias numa secção a montante do analisado

1 Introdução

Este capítulo contém a informação necessária para a compreensão e desenvolvimento dos restantes capítulos que constituem este trabalho. Em primeiro lugar será feita uma pequena revisão e resumo dos trabalhos anteriores, Cruz (2010), Cruz *et al.* (2010) e Silva (2012) seguido da justificação do interesse do presente trabalho. De seguida ir-se-á fazer uma apresentação e classificação genérica dos fluidos bem como uma descrição dos números adimensionais de maior relevo para o presente trabalho. Posteriormente, será feita uma sucinta apresentação dos diferentes tipos de fluidos a utilizar no presente trabalho e respetivos modelos reológicos também já utilizados por Cruz (2010) e Silva (2012). O capítulo termina com uma descrição da estrutura da presente tese.

1.1 Resumo de trabalhos anteriores

Neste momento é de todo o interesse fazer uma compilação de toda a informação essencial abordada nos trabalhos anteriores e que, por sua vez, também será utilizada neste. Antes de mais, será feita a apresentação do modelo lei de potência, também conhecido por modelo de Ostwald-de Waele, sendo este a base do método simplificado, seguido da exposição da metodologia simplificada baseada neste modelo, introduzido por Cruz (2012), e finalizando com as expressões encontradas por Silva (2012) para o número de Nusselt de um fluido lei de potência e temperatura de parede constante.

1.1.1 Modelo lei de potência

Como o modelo reológico lei de potência está na base do método simplificado, será de todo o interesse que seja apresentado em primeiro lugar. Neste modelo o coeficiente de viscosidade varia com a taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, $\mu = \mu(\dot{\gamma})$, de acordo com uma lei de potência sendo que para o caso de um escoamento totalmente desenvolvido entre placas paralelas ou tubos de secção circular esta é igual ao gradiente de velocidade du/dy .

Este modelo é muito utilizado em trabalhos de engenharia dada a sua simplicidade, no entanto apenas se ajusta, para um fluido não-Newtoniano genérico, a determinados intervalos da curva de viscosidade de um fluido onde o logaritmo da viscosidade, $\log \mu$, varia linearmente com o logaritmo da taxa de deformação, $\log \dot{\gamma}$. Segundo Bird *et al.* (1987), o modelo reológico lei de potência é dado pela seguinte expressão,

$$\mu(\dot{\gamma}) = K \dot{\gamma}^{n-1} \text{ e } \tau = K \dot{\gamma}^n \quad (1.1)$$

em que K representa o índice de consistência, τ a tensão de corte e n o índice de potência, para mais detalhes ver secção 1.5.

1.1.2 Metodologia do método simplificado no cálculo de f e Nu

Nesta secção será feita uma descrição da metodologia do método simplificado utilizando tanto no trabalho de Cruz (2010) como no de Silva (2012).

Segundo Cruz (2010), a tensão de corte na parede, τ_w , para um escoamento laminar totalmente desenvolvido para um qualquer fluido não-Newtoniano inelástico numa conduta circular pode ser aproximada pela expressão (1.2), desde que seja utilizada a taxa de deformação característica $\dot{\gamma}_{carac.} = 8\bar{U}/D$ correspondente à taxa de deformação na parede da conduta circular de um fluido Newtoniano.

$$\tau_w = K' \left(\frac{8\bar{U}}{D} \right)^{n'} \quad (1.2)$$

onde n' é o índice de potência aparente e $K' = K[(3n' + 1)/4n']^{n'}$. Neste caso, K e n' são os parâmetros do modelo lei de potência aparente que é tangente à curva de viscosidade do fluido inelástico genérico num ponto correspondente a uma taxa de deformação igual à taxa de deformação característica, $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{carac.} = 8\bar{U}/D$, conforme se mostrará seguidamente, sendo \bar{U} a velocidade média e D o diâmetro da conduta.

A Figura 1-1 apresenta uma representação gráfica da curva de viscosidade de um fluido genérico não-Newtoniano com dois patamares Newtonianos, o primeiro a baixas taxas de deformação e um segundo a altas taxas de deformação. Esta figura mostra

também que a curva de viscosidade do modelo de lei de potência será usado localmente como uma tangente à curva do fluido em questão para diferentes pontos de $\dot{\gamma}_{carac.}$. Como se pode verificar, para cada valor de taxa de deformação característica corresponde um índice de potência diferente. Assim, como existe um fluido lei de potência aparente para cada ponto, foi adotada a nova nomenclatura em que o índice de potência, n' , é, como referido anteriormente, o índice de potência aparente, e a sua forma de calcular será mencionada mais à frente.

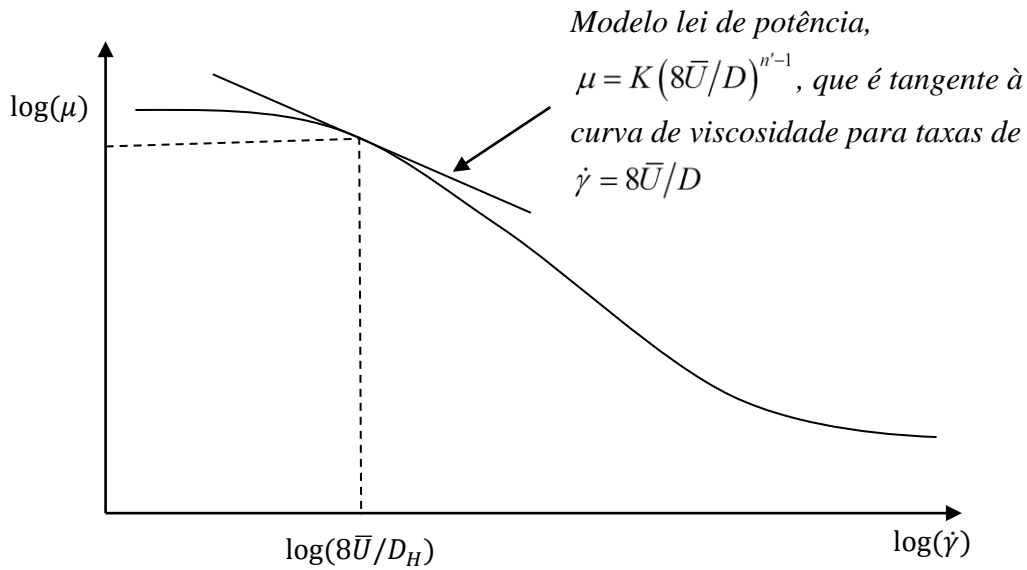


Figura 1-1 - Curva de viscosidade do fluido lei de potência (reta) tangente à curva de um fluido genérico.¹

Também pode ser definida a viscosidade característica, μ' , que está na base do cálculo do número de Reynolds generalizado, Re' ,

$$\mu' = \frac{\tau_w}{\left(\frac{8\bar{U}}{D}\right)} = \frac{K' \left(\frac{8\bar{U}}{D}\right)^{n'}}{\left(\frac{8\bar{U}}{D}\right)} = K' \left(\frac{8\bar{U}}{D}\right)^{n'-1} \quad (1.3)$$

Para simplificar a obtenção do valor de μ' , e por sua vez, a implementação deste processo, sem a necessidade de cálculo de K , foi apresentada a seguinte metodologia,

como,

¹ Figura adaptada de Cruz (2010) e Silva (2012).

$$K' = \left(\frac{3n' + 1}{4n'} \right)^{n'} K \quad (1.4)$$

fica,

$$\mu' = \left(\frac{3n' + 1}{4n'} \right)^{n'} K \left(\frac{8\bar{U}}{D} \right)^{n'-1} \quad (1.5)$$

então, através da equação (1.1),

$$\mu' = \left(\frac{3n' + 1}{4n'} \right)^{n'} \mu(\dot{\gamma}) \quad (1.6)$$

Como $\mu(\dot{\gamma})$ pode ser lido diretamente na curva de viscosidade do fluido, pois $K \left(\frac{8\bar{U}}{D} \right)^{n'-1}$ corresponde à viscosidade no ponto onde $\dot{\gamma} = \frac{8\bar{U}}{D}$, não há, assim, a necessidade do cálculo de K .

O Reynolds generalizado, Re' , no caso de tubos de secção circular, é então calculado com base na viscosidade aparente dada pela equação (1.6), ou seja,

$$Re' = \frac{\rho U D}{\mu'} \quad (1.7)$$

O coeficiente de atrito de Darcy aproximando, f' , é calculado com base no número de Reynolds generalizado através da seguinte equação,

$$f' = \frac{64}{Re'} \quad (1.8)$$

Deste modo pode ser estimado o coeficiente de atrito, f' , para qualquer fluido puramente viscoso não-Newtoniano no caso de condutas circulares.

Para o cálculo do índice de potência aparente, n' , é necessário conhecer antes de mais as expressões da derivada da curva viscosidade em função da taxa de deformação do respetivo modelo e a expressão da tensão corte em função da taxa de deformação (Cruz, 2010). Assim, sabendo que,

$$\mu = K \dot{\gamma}^{n'-1} \text{ e } \tau = K \dot{\gamma}^{n'} \quad (1.1)$$

derivando a expressão matemática da curva de viscosidade em função da taxa de deformação do modelo lei de potência e igualando à derivado da viscosidade do respetivo modelo reológico a estudar,

$$\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido geral}} = \left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido potência}} \quad (1.9)$$

com,

$$\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido potência}} = K(n'-1)\dot{\gamma}^{(n'-2)} = \tau(n'-1)\dot{\gamma}^{-2} \quad (1.10)$$

Recorrendo às equações anteriores, (1.9) e (1.10), e para cada valor de taxa de deformação característica calcula-se assim o índice de potência aparente n' a utilizar no modelo de lei de potência, ou seja,

$$n' = \frac{\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido geral}}}{\tau\dot{\gamma}^{-2}} + 1 = \frac{\left. \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}} \right|_{\text{fluido geral}}}{\mu/\dot{\gamma}} + 1 \quad (1.11)$$

Esta metodologia vai ser também adotada para o cálculo de n' de todos os modelos de fluidos não-Newtonianos a utilizar na realização do presente trabalho.

Na Tabela 1-1 apresentam-se as diferentes expressões de n' para os vários fluidos utilizados neste trabalho, sPTT, Herschel-Bulkley, Bingham, Casson e Carreau-Yasuda, e que já foram utilizadas nos trabalhos anteriores, Cruz (2010) e Silva (2012).

Tabela 1-1 - Expressões para o cálculo de n' para diferentes tipos de fluidos.

Fluidos	n'
sPTT	$n' = \frac{w^{1/3}(zw^{4/3} + 2\sqrt{3}(243f^2 + 81f + 4)y + z(162f^2 + 48f + 1)) + \sqrt{3}(1944f^2 + 297f + 10)y + z(648f^2 + 75f + 1)}{z((w^{4/3} + 2\sqrt{3}zy + 486f^2 + 54f + 1)w^{1/3} + \sqrt{3}(108f + 5)y + 972f^2 + 81f + 1)}$ $f = \varepsilon\lambda^2\dot{\gamma}^2$ $y = \sqrt{f \cdot z}$ $w = 3\sqrt{3}\sqrt{f \cdot z} + 27f + 1$ $z = 27f + 2$ <p>onde η é a constante de viscosidade, ε é o parâmetro extensional e λ é o tempo de relaxação.</p>
Herschel-Bulkley	$n' = \frac{nK\dot{\gamma}^n}{\tau_0 + K\dot{\gamma}^n}$ <p>onde τ_0 é a tensão de cedência, K é o parâmetro da viscosidade e n é o parâmetro do modelo de Herschel-Bulkley. Quando $n = 1$ está-se na presença do modelo de Bingham.</p>
Bingham	$n' = 1 - \frac{\tau_0}{\mu_\infty\dot{\gamma} + \tau_0}$ <p>onde $\mu_\infty = K$ é o parâmetro de viscosidade.</p>
Casson	$n' = \frac{\sqrt{\mu_\infty\dot{\gamma}}}{\sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_\infty\dot{\gamma}}}$ <p>onde μ_∞ é a viscosidade do patamar Newtoniano</p>
Carreau-Yasuda	$n' = 1 + \frac{(\mu_0 - \mu_\infty)(n-1)\left[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a\right]^{(n-1-a)/a}(\Lambda\dot{\gamma})^a}{\mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty)\left[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a\right]^{(n-1)/a}}$ <p>onde μ_0 e μ_∞ são as viscosidades do primeiro e segundo patamar Newtoniano, respetivamente, Λ é a constante de tempo e a é um parâmetro adimensional que descreve a zona de transição entre o primeiro patamar Newtoniano e a zona de lei de potência</p>

Após o cálculo do índice de potência aparente é também possível calcular de forma aproximada o número de Nusselt, Nu' , para qualquer fluido não-Newtoniano que escoe numa conduta circular e que possua curvas de viscosidade diferentes da dos fluidos lei de potência. Assim, basta utilizar a expressão de cálculo do número de Nusselt, Nu , de um fluido lei de potência, que é só função do índice de potência, n , e substituir este por n' . No caso do fluxo de calor constante na parede de uma conduta de secção circular a expressão da literatura a usar é a seguinte,

$$Nu' = \frac{8(5n' + 1)(3n' + 1)}{31n'^2 + 12n' + 1} \quad (1.12)$$

Para finalizar esta secção, serão apresentados os erros encontrados então na utilização do método simplificado, tanto para o número de Nusselt, para o caso de fluxo de calor constante na parede, como para o coeficiente de atrito. Para isso foi necessário comparar os valores exatos, f e Nu , e os valores aproximados, (1.8) e (1.12), f' e Nu' , obtendo-se, assim, o erro relativo através das seguintes expressões,

$$\varepsilon_{f'} = \frac{|f - f'|}{f} \times 100\% \quad (1.13)$$

$$\varepsilon_{Nu'} = \frac{|Nu - Nu'|}{Nu} \times 100\% \quad (1.14)$$

sendo $\varepsilon_{f'}$ o erro do coeficiente de atrito e $\varepsilon_{Nu'}$ o erro do cálculo do número de Nusselt.

No caso do coeficiente de atrito, Cruz *et al.* (2012) obteve erros relativos máximos de 6% para o caso do modelo de Herschel-Bulkley (que ocorre para $n = 1,5$), de 3% para o caso do modelo de Bingham e de 2% para o modelo de Casson.

No cálculo aproximado do número de Nusselt os erros máximos obtidos no caso do modelo de Herschel-Bulkley foram de 3% para $n=0,5$, de 5% para $n = 1$, fluido de Bingham, e 8% para $n = 1,5$. No caso dos restantes fluidos, o erro máximo foi inferior a 3%. De referir que a expressão analítica de Nusselt para o fluido sPTT pode ser encontrada em Pinho e Coelho (2009), a do fluido Bingham foi obtida por Min e Yoo (1999) e para os fluidos de Herschel-Bulkley e Carreau-Yasuda os valores “exatos” foram obtidos pela integração numérica da equação de energia.

1.1.3 Número de Nusselt simplificado para temperatura de parede constante

No trabalho de Silva (2012) estendeu-se o trabalho de Cruz (2010) de forma a se poder calcular pelo método simplificado, descrito anteriormente, o número de Nusselt para o caso de temperatura de parede constante. Para tal foi necessário recorrer à integração semi-analítica da equação da energia para a obtenção de uma expressão adequada pois, no caso de temperatura de parede constante, não existia uma expressão para o cálculo de Nu para fluidos lei de potência. Silva (2012) obteve duas expressões de Nusselt para um fluido lei de potência e temperatura constante na parede, uma para o caso de escoamentos em tubos de secção circular e outra para o caso de escoamento entre placas paralelas. A expressão (1.15) apresenta a solução final para o Nu , obtida por um processo semi-analítico após três iterações, para o caso de escoamento em tubos de secção circular sendo esta dada por um polinómio de grau 15,

$$Nu = \frac{1980}{342} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{i=15} \alpha_i n^i}{1 + \sum_{i=1}^{i=15} \beta_i n^i} \right) \quad (1.15)$$

onde as constantes α_i e β_i podem ser encontrados na Tabela 3.2 de Silva (2012).

Para o caso de escoamento entre placas paralelas, a expressão para o número de Nusselt é ligeiramente diferente da anterior e é dada pela equação (1.16) obtida também à terceira iteração sendo dada por,

$$Nu = \frac{7050240}{714240} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{i=16} \alpha_i n^i}{1 + \sum_{i=1}^{i=16} \beta_i n^i} \right) \quad (1.16)$$

sendo α_i e β_i constantes que podem ser encontradas na Tabela 3.4 do trabalho de Silva (2012).

Para uma análise mais correta e completa é portanto necessário a referência ao erro médio e máximo encontrado nas expressões (1.15) e (1.16) para tubos de secção circular e placas paralelas, respetivamente. Para temperatura constante na parede foi utilizado a mesma expressão de cálculo do erro que no caso de fluxo constante. Assim, através da expressão (1.14) foi possível o cálculo do erro médio, onde neste caso Nu' é o

número de Nusselt obtido através do método semi-analítico e Nu o número de Nusselt obtido numericamente.

$$\varepsilon_{Nu'} = \frac{|Nu - Nu'|}{Nu} \times 100\% \quad (1.14)$$

Assim, o erro médio para tubos circulares, encontrado por Silva (2012), do número de Nusselt foi de 0,052% e o erro máximo foi de 0,109%. Para o caso de placas paralelas, o erro médio encontrado do número de Nusselt foi de 0,004% e um erro máximo de 0,014%. Para tubos de secção circular e placas paralelas, as figuras 1-2 e 1-3, respetivamente, representam os resultados de Nu de ambos os métodos, semi-analítico e numérico, calculados para cerca de 1500 valores de n onde se pode verificar que os valores entre os dois métodos são praticamente os mesmos.

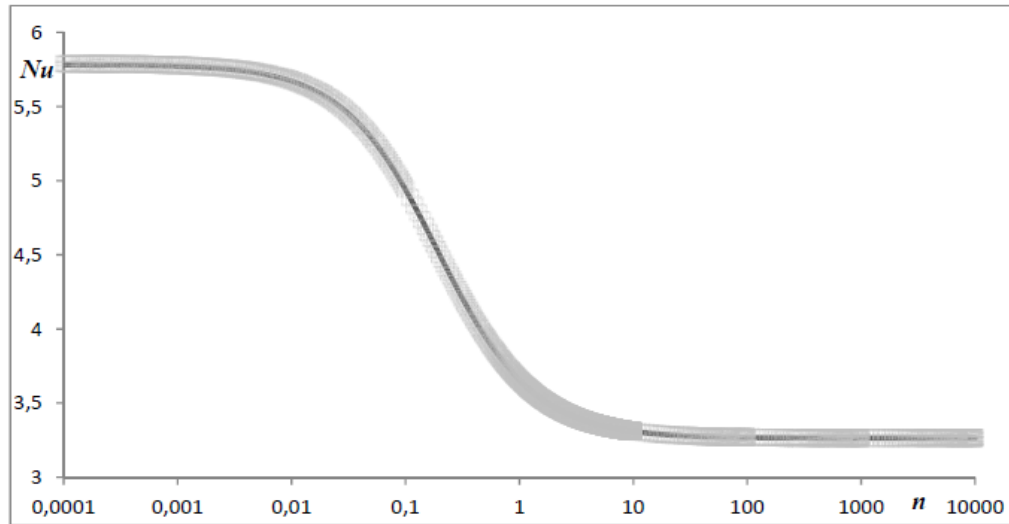


Figura 1-2 - Representação gráfica do número de Nusselt para tubos circulares pelo método semi-analítico, \square , e numérico, linha, em função do índice de potência, n .²

² Imagem retirada de Silva (2012), pag. 46, Figura 3.2.

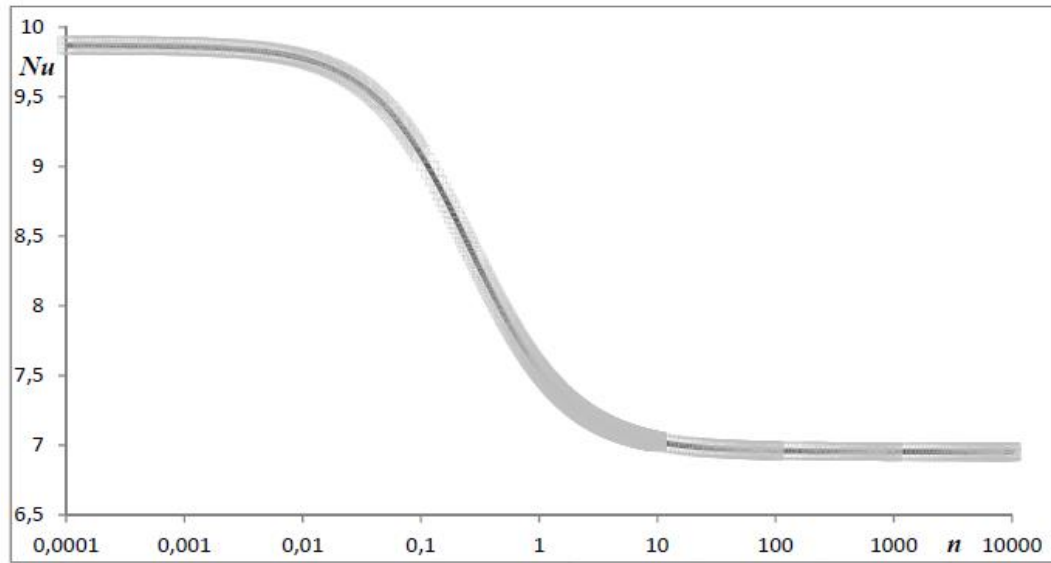


Figura 1-3 - Representação gráfica do número de Nusselt para placas paralelas pelo método semi-analítico, □, e numérico, linha, em função do índice de potência, n .³

As expressões anteriores, podem ser vistas como um complemento ao trabalho, pois não serão utilizadas neste trabalho, isto porque são expressões bastante extensas. Silva (2012) optou também por ajustar os valores de Nu em função de n , obtidos numericamente a uma expressão da forma da presente na equação (1.17), ficando assim, formalmente mais simples,

$$Nu = \frac{a_1(a_2n^2 + a_3n + 1)}{a_4n^2 + a_5n + 1} \quad (1.17)$$

Para o caso de um escoamento numa conduta circular, a expressão simplificada para o número de Nusselt encontrada por Silva (2012) é dada por,

$$Nu = \frac{5,7829(34,2025n^2 + 13,5891n + 1)}{60,5965n^2 + 15,5622n + 1} \quad (1.18)$$

No caso de um escoamento entre placas paralelas, a expressão de Nusselt simplificada é dada pela expressão (1.19),

$$Nu = \frac{9,8694(26,7773n^2 + 11,7895n + 1)}{38,0066n^2 + 12,7778n + 1} \quad (1.19)$$

³ Imagem retirada de Silva (2012), pag. 52, Figura 3.4.

O erro médio encontrado para o número de Nusselt foi de 0,003% e o máximo de 0,017% para o caso de tubos circulares, equação (1.18). Para placas paralelas, o erro médio encontrado foi de 0,002% e o erro máximo de 0,010%, equação (1.19). Tal como acontece para o método semi-analítico, para o cálculo do erro utilizou-se a expressão (1.14).

Como Silva (2012) constatou, a solução simplificada ajustou melhor os 1500 pontos de Nu em função de n do que a solução semi-analítica obtida na terceira iteração.

De referir ainda que para o caso de fluxo de calor constante, a expressão encontrada por Silva (2012) para o número de Nusselt, Nu , através da integração da equação de energia, pôde ser confirmada com uma já existente na literatura, Skelland (1967). Assim, a expressão de Nu para placas paralelas e fluxo de calor constante na parede é dada por,

$$Nu = \frac{12(4n+1)(5n+2)}{32n^2+17n+2} \quad (1.20)$$

1.2 Justificação do interesse deste trabalho

O tema deste trabalho, o estudo da simplificação do cálculo do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares totalmente desenvolvidos de fluidos não-Newtonianos entre placas paralelas vem pois no seguimento dos trabalhos realizados por Cruz (2010) e Cruz *et al.* (2012) que tinham como objetivo a simplificação do cálculo do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares totalmente desenvolvidos de fluidos não-Newtonianos em condutas de secção circular com fluxo de calor constante e no seguimento do trabalho de Silva (2012) em que o tema é o cálculo simplificado do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos no interior de condutas de secção circular mas desta vez com temperatura de parede constante. Portanto, com a necessidade de expandir a aplicação do método simplificado para o caso de condutas não circulares, mais concretamente placas paralelas, surge o presente trabalho que se irá então debruçar sobre o cálculo simplificado do coeficiente de atrito e da transferência de calor, com fluxo de calor e temperatura na parede constantes, no referido escoamento.

Assim, este trabalho tem pois como objetivo testar uma metodologia para o cálculo simplificado do coeficiente de atrito e número de Nusselt para fluxo de calor e temperatura na parede constantes, em escoamentos laminares totalmente desenvolvidos de fluidos não-Newtonianos entre placas paralelas com condução axial de calor desprezável. Serão, então, comparados os resultados obtidos pelo método aproximado com as soluções exatas, obtidas analiticamente ou numericamente, para vários modelos reológicos de fluidos não-Newtonianos. Mais concretamente serão utilizados os seguintes fluidos Phan-Thien–Tanner simplificado (sPTT), Herschel-Bulkley, Bingham, Casson e Carreau-Yasuda.

No cálculo exato do coeficiente de atrito serão utilizadas as soluções analíticas existentes exceto no caso do fluido Carreau-Yasuda, para o qual não existem soluções analíticas, recorrendo-se neste caso à integração numérica. No caso do cálculo exato do número de Nusselt, para temperatura de parede constante só por integração numérica da equação de energia se podem obter as soluções pretendidas. Para fluxo de calor constante, embora existam soluções analíticas para alguns fluidos, optou-se por utilizar também as soluções numéricas dada a elevada precisão destas.

O método de integração é basicamente o mesmo que foi utilizado em trabalhos anteriores (Cruz *et al.* 2012, Silva 2012) sendo possuidor de uma elevada precisão, como se mostrará novamente no decorrer do presente trabalho.

No cálculo aproximado do número de Nusselt para o caso de temperatura de parede constante, ao contrário do que acontece para fluxo de calor constante na parede, não existia até há pouco tempo na literatura, expressões matemáticas para a obtenção do número de Nusselt de um fluido lei de potência, algo fundamental para a implementação do método, pelo que só após o trabalho de Silva (2012), onde as referidas expressões foram determinadas, expressões (1.18) e (1.19), é que se tornou possível estender este método também a este caso.

Com este trabalho fica assim disponível na literatura, um conjunto de ferramentas úteis e simples para a determinação do coeficiente de atrito e do número de Nusselt (casos de fluxo de calor e temperatura constantes na parede) e para qualquer fluido não-Newtoniano em escoamento desenvolvido em regime laminar agora entre placas paralelas.

1.3 Classificação dos Fluidos

Os fluidos podem ser classificados como não-Newtonianos ou Newtonianos tendo em conta a existência ou não de uma dependência entre a viscosidade e a taxa de deformação e/ou a existência ou não de elasticidade, respetivamente.

Como no escoamento que é objeto de estudo neste trabalho os efeitos elásticos não se manifestam, além da presença de tensões normais para os fluidos viscoelásticos, todos os fluidos estudados se comportam como sendo puramente viscosos, mesmo que o modelo reológico possa contabilizar a elasticidade como é o caso do fluido sPTT. Este trabalho terá pois como objeto de estudo apenas os fluidos que se comportam como puramente viscosos não-Newtonianos, sendo que a referência aos fluidos viscoelásticos e Newtonianos nas secções seguintes poderá ser vista como informação complementar.

1.3.1 Fluido Newtoniano

Os fluidos Newtonianos podem ser definidos como fluidos cuja taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, é proporcional à tensão de corte, τ , (Çengel *et al*, 2007), ver Figura 1-4, na qual a viscosidade de corte, μ , apenas varia com a pressão ou temperatura, não variando com a taxa de deformação nem com o tempo (João, 2001). Assim, a tensão de corte é definida por uma relação linear como mostra a equação (1.21),

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (1.21)$$

Estes fluidos abrangem todos os gases e líquidos não poliméricos e homogéneos (Cruz, 2010). Na Figura 1-4 encontram-se alguns exemplos de fluidos Newtonianos como sejam o óleo, a água e o ar com a tensão de corte a variar linearmente com a taxa de deformação, representando o declive das curvas a constante de proporcionalidade, μ , (Munson *et al.*, 2009).

Viscosidade=Declive

$$\mu = \frac{a}{b} = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad (1.22)$$

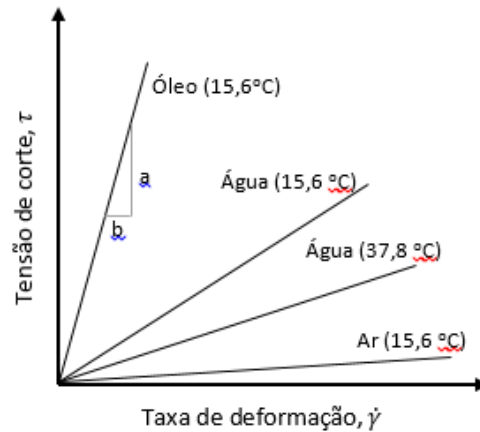


Figura 1-4 - Variação da tensão de corte, τ , em função da taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, com a representação da constante de proporcionalidade, μ .⁴

1.3.2 Fluido não-Newtoniano

Segundo João (2001), estes fluidos são normalmente classificados em duas grandes categorias, fluidos viscoelásticos e fluidos puramente viscosos, sendo estes últimos, e como já referido anteriormente, os que serão alvo de estudo neste trabalho.

Os fluidos viscoelásticos apresentam alguma recuperação elástica após remoção da tensão de deformação aplicada e agregam características de fluido e de sólidos elásticos.

Os fluidos totalmente viscosos não possuem comportamento elástico, não são capazes de armazenar energia elasticamente e assim sendo o trabalho é dissipado sob a forma de calor. Ainda se podem dividir em duas outras classes, independentes e dependentes no tempo.

No caso dos fluidos cuja viscosidade depende do tempo, a taxa de deformação não é simplesmente função da tensão de corte instantânea, mas também da duração e dos intervalos de tempo entre suas aplicações. Estes fluidos são subdivididos em tixotrópicos e reopéticos. No primeiro, a viscosidade diminui ao longo do tempo para uma taxa de deformação constante e no segundo caso têm um comportamento oposto ao primeiro. Numa experiência em que a taxa de deformação aumenta permanentemente

⁴ Imagem adaptada de Munson (2009), pag.16, Figura 1.6.

até um dado valor e em seguida diminui até ao valor inicial obtém-se com estes fluidos um ciclo de histerese, como ilustra a Figura 1-5,

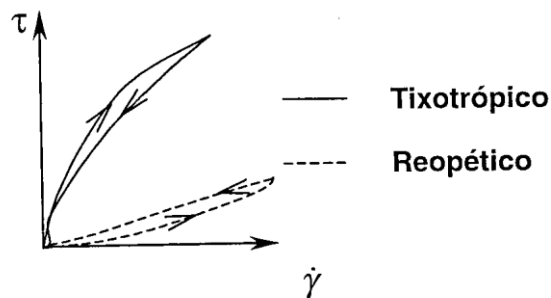


Figura 1-5 - Tensão de corte em função da taxa de deformação para os fluidos tixotrópicos e reopéticos.⁵

Os fluidos independentes no tempo ainda podem ser divididos em 3 grupos, dilatantes, pseudoplásticos e plásticos de Bingham. De acordo com Çengel (2007), nos fluidos dilatantes a viscosidade aumenta com a taxa de deformação, nos pseudoplásticos a viscosidade diminuiu com o aumento da taxa de deformação, possuem portanto um comportamento inverso do anterior. No caso dos plásticos de Bingham, estes resistem a baixas tensões de corte, comportando-se como um sólido, mas passam a comportar-se como um fluido quando a tensão de corte ultrapassa um determinado limite, deformando-se continuamente. Um bom exemplo de um fluido com este comportamento é a pasta de dentes. A figura seguinte mostra a variação da tensão de corte com a taxa de deformação destes fluidos, comparando-os com os fluidos Newtonianos.

⁵ Imagem retirada de João (2011), pag. 28, Figura 2.3.

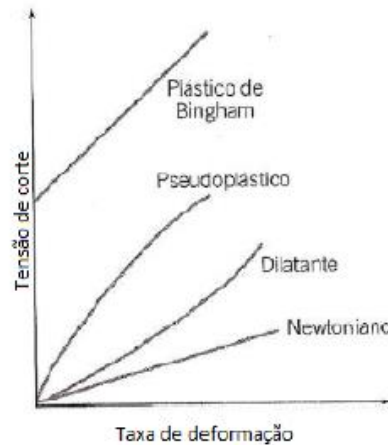


Figura 1-6 – Tensão de corte em função da taxa de deformação dos fluidos totalmente viscosos independentes do tempo e dos fluidos Newtonianos.⁶

1.4 Números adimensionais

Serão apresentados nesta secção os números adimensionais mais relevantes, sendo alguns deles utilizados ao longo do presente trabalho, bem como a explicação do seu significado físico. Estes são os números de Reynolds, de Prandtl, de Péclet, de Weissenberg, de Bingham e, finalmente, de Nusselt.

1.4.1 Número de Reynolds

Na década de 1880, Osborne Reynolds, após muitas e exaustivas experiências, descobriu que o regime de escoamento depende do quociente entre as forças de inércia e as forças viscosas do fluido, isto é o número de Reynolds. Para um tubo de secção circular, esta relação é expressa por,

$$Re = \frac{\text{Forças de inércia}}{\text{Forças viscosas}} = \frac{\rho \bar{U} D}{\mu} \quad (1.23)$$

onde, ρ é a massa volúmica, \bar{U} é a velocidade média na conduta, D é o diâmetro da conduta e μ é a viscosidade de corte.

⁶ Imagem retirada de Cruz (2010), pag. 2, Figura 1.1 (a).

Neste trabalho, como se estuda o caso de uma secção não circular, o número de Reynolds será ligeiramente diferente. Assim, o diâmetro da conduta D , será substituído por D_H , diâmetro hidráulico. Então,

$$Re = \frac{\rho \bar{U} D_H}{\mu} \quad (1.24)$$

onde D_H é definido de uma forma que se reduz ao diâmetro no caso de uma conduta circular,

$$D_H = \frac{4A}{P} \quad (1.25)$$

sendo A a área da secção de passagem e P o perímetro molhado. Para placas paralelas temos que,

$$D_H = \lim_{B \rightarrow \infty} \frac{4B2H}{4(2B + 4H)} = 4H \quad (1.26)$$

ou seja, o diâmetro hidráulico é igual a $4H$, quando a largura das placas, B , tende para infinito, sendo H metade da distância entre as placas. Na seguinte figura estão esquematizadas as cotas B e H para o caso de placas paralelas,

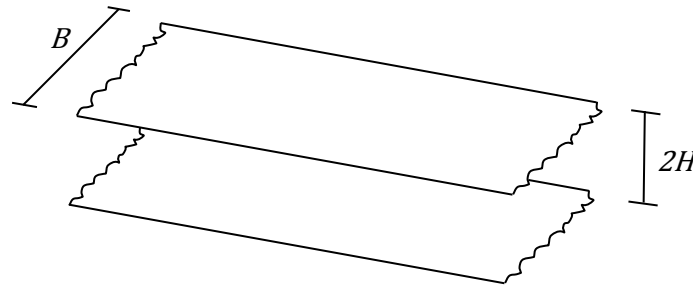


Figura 1-7 - Representação de placas paralelas com suas cotas.

Foi também Reynolds o primeiro a propor um critério para a diferenciação entre o regime laminar e turbulento, regime de transição, daí este número ter uma grande importância quando se pretende caracterizar o tipo de regime de escoamento.

Como já referido anteriormente, o regime de escoamento estudado durante este trabalho será o laminar para fluidos não-Newtonianos. De acordo com Çengel *et al.*

(2007), o valor de Re geralmente aceite para a transição de regime laminar para turbulento, Re_c , em escoamento interno em um tubo circular de um fluido Newtoniano é $Re_c = 2300$. No caso de um escoamento interno entre placas paralelas, de acordo com Zang e Krist (1989), este valor é mais baixo, $Re_c = 1500$.

No caso de fluidos não-Newtonianos estes valores são um pouco diferentes. Segundo Trinh (2010, pag. 6), os dados experimentais para a transição nestes fluidos são escassos e imprecisos. Hanks (1963), para fluidos lei de potência, apresentou uma forma de cálculo do número de Reynolds crítico. Esta será apresentada de seguida,

$$Re_{g,c} = 6464 \frac{n(2+n)^{\frac{2+n}{1+n}}}{(1+3n)^2} \quad (1.27)$$

onde Re_g é o número de Reynolds Metzner-Reed generalizado e n o índice de potência. No entanto, de acordo com Trinh (2010) esta expressão só era aceitável para valores médios de n . Para valores baixos de n eles propuseram uma expressão ligeiramente diferente,

$$Re_{g,c} = 2100 \frac{(4n+2)(5n+3)}{3(3n+1)^2} \quad (1.28)$$

Já para fluidos elásticos o regime laminar pode manter-se até números de Reynolds mais elevados, por exemplo no caso de condutas de secção circular o número de Reynolds transição é da ordem dos 6000 (Hartnett and Cho, 1998).

1.4.2 Número de Reynolds generalizado

No caso de um fluido não-Newtoniano que segue a lei de potência, $\mu = K\dot{\gamma}^{n-1}$, é necessário adaptar o número de Reynolds, Re , apresentado na secção anterior, 1.4.1. O número de Reynolds generalizado, Re' , expressão de Kozicki *et al.* (1966) de acordo com Hartnett and Cho, (1998) é comumente usado e é dado por,

$$Re' = \frac{\rho \bar{U}^{2-n} D_H^n}{8^{n-1} \left(b^* + \frac{a^*}{n} \right)^n K} \quad (1.29)$$

onde a^* e b^* são valores que dependem da forma da secção da conduta por onde o fluido escoar, ver Tabela 1-2. Desta forma Re é calculado de modo que a equação de cálculo do coeficiente de atrito de Darcy seja igual à expressão para fluidos Newtonianos em condutas circulares, ou seja,

$$f = 64/Re' \quad (1.30)$$

Tabela 1-2 - Constantes geométricas a^* e b^* , função de $\alpha^* = 2H/B$.⁷

α^*	a^*	b^*	α^*	a^*	b^*	α^*	a^*	b^*
1,00	0,21	0,6771	0,65	0,2248	0,6985	0,30	0,2991	0,7954
0,95	0,2123	0,6774	0,60	0,2297	0,7065	0,25	0,3212	0,8183
0,90	0,2129	0,6785	0,55	0,2360	0,7163	0,20	0,3475	0,8444
0,85	0,2139	0,6803	0,50	0,2439	0,7278	0,15	0,3781	0,8745
0,80	0,2155	0,6831	0,45	0,2538	0,7414	0,10	0,4132	0,9098
0,75	0,2178	0,6870	0,40	0,2659	0,7571	0,05	0,4535	0,9513
0,70	0,2208	0,6921	0,35	0,2809	0,7750	0,0	0,5000	1,0000

Para o escoamento entre placas paralelas, $\alpha^* = 2H/B = 0$, e a expressão de Reynolds generalizado é pois neste caso dada por,

$$Re' = \frac{\rho \bar{U}^{2-n} D_H^n}{8^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n K} \quad (1.31)$$

1.4.3 Número de Prandtl

Segundo Pinho e Coelho (2009) e Incropera *et al.* (2011), o número de Prandtl representa a razão entre as difusividades da quantidade de movimento e térmica. Assim, este é definido como,

⁷ Tabela adaptada de Hartnett e Cho, cap.10, pag. 10.17, Tabela 10.7.

$$Pr = \frac{\text{Difusividade de quant. mov.}}{\text{Difusividade térmica}} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.32)$$

sendo a difusividade térmica, α , dada por $\alpha = k / \rho c_p$, onde k é a condutividade térmica e c_p é o calor específico, e ν a viscosidade cinemática, Pr é dado pela expressão (1.33).

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad (1.33)$$

A viscosidade dinâmica pode ser relacionada com a viscosidade cinemática através da expressão, $\nu = \mu / \rho$.

1.4.4 Número de Péclet

O número de Péclet é representado pelo quociente entre as taxas de transferência de calor por advecção com as de condução (Incropera *et al.*, 2011), isto é, relaciona a velocidade de transporte por advecção e a velocidade de transporte por difusão térmica (Cruz, 2010). Pode ser expressado também através do produto do número de Reynolds e Prandtl,

$$Pe = Re \cdot Pr = \frac{\rho \bar{U} D_H c_p}{k} = \frac{\bar{U} D_H}{\alpha} \quad (1.34)$$

Como é facilmente verificado, Pe não depende da viscosidade do fluido (Pinho e Coelho, 2009).

1.4.5 Número de Weissenberg

O número de Weissenberg é definido através da razão entre as forças elásticas e as forças viscosas num escoamento (Coelho, 2000),

$$Wi = \frac{\lambda \bar{U}}{R} \quad (1.35)$$

onde λ é o tempo de relaxação do fluido e R , no caso de placas paralelas, é igual a metade da altura, $R=H$ (Coelho e Pinho, 2008). De acordo com Cruz (2010), o tempo de relaxação de um fluido que obedeça a equação constitutiva de Maxwell pode ser

relacionado com a primeira diferença de tensões normais, N_1 , sendo $N_1 = 2\mu\lambda\dot{\gamma}^2$. Visto que a tensão de corte, τ , é dada pela expressão $\tau = \mu\dot{\gamma}$, com $\dot{\gamma}$ proporcional a \bar{U}/H , averigua-se facilmente que a razão entre as forças elásticas e viscosas é proporcional a $\frac{\lambda\bar{U}}{R}$.

1.4.6 Número de Nusselt

O número adimensional de Nusselt compara a transferência de calor por convecção com a transferência de calor que ocorreria somente por condução (Incropera *et al.*, 2011), tal como se pode verificar com o seguinte quociente,

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (1.36)$$

onde L é o comprimento característico, neste caso $L=D_h$, e o h é o coeficiente de convecção.

1.4.7 Número de Bingham

A expressão seguinte define o número de Bingham sendo que este permite quantificar a importância da tensão de cedência, τ_0 , (Cruz, 2010),

$$Bn = \frac{\tau_0 D_H}{\bar{U} \mu_\infty} \quad (1.37)$$

onde μ_∞ é a viscosidade do patamar Newtoniano. De referir que os perfis de velocidade desenvolvem-se mais rapidamente para número de Bingham mais altos (Poole e Chhabra, 2010).

1.5 Modelos reológicos

Uma vez que este trabalho vem na sequência de outros dois, Cruz (2010) e Silva (2012), os fluidos analisados serão os mesmos. Assim, na Tabela 1-3, serão apresentados os fluidos com o seu respetivo modelo reológico e na Tabela 1-4 apresenta-se uma representação gráfica genérica da curva viscosidade em função da taxa de deformação para cada um destes mesmos fluidos.

Tabela 1-3 - Fluidos utilizados e respectivos modelos reológicos.

Fluidos	Modelo Reológico
Lei de Potência	$\mu = K\dot{\gamma}^{n-1}$ <p><i>Com $n < 1$, pseudoplásticos</i></p> <p><i>Com $n = 1$, Newtoniano</i></p> <p><i>Com $n > 1$, dilatante</i></p>
sPTT	$\mu = \eta \cdot \left[1 + \frac{(b-1)^2}{3b} \right]$ $b = \left(c + \sqrt{c^2 - 1} \right)^{1/3}$ $c = 1 + 27\varepsilon(\lambda\dot{\gamma})^2$
Herschel-Bulkley	$\begin{cases} \mu = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases}$
Bingham	$\begin{cases} \mu = \mu_\infty + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases}$
Casson	$\begin{cases} \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}} & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases}$
Carreau-Yasuda	$\mu = \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + (\Lambda\dot{\gamma})^a \right]^{\frac{(n-1)}{a}}$

Tabela 1-4 - Representação gráfica de curvas de viscosidade típicas dos fluidos utilizados para o respectivo modelo reológico.

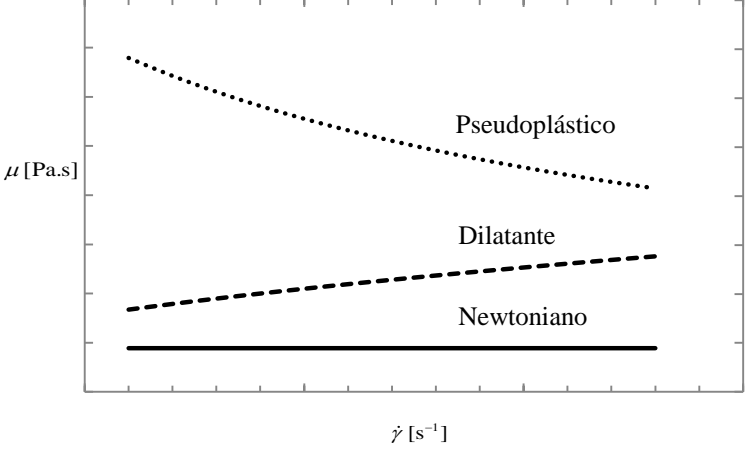
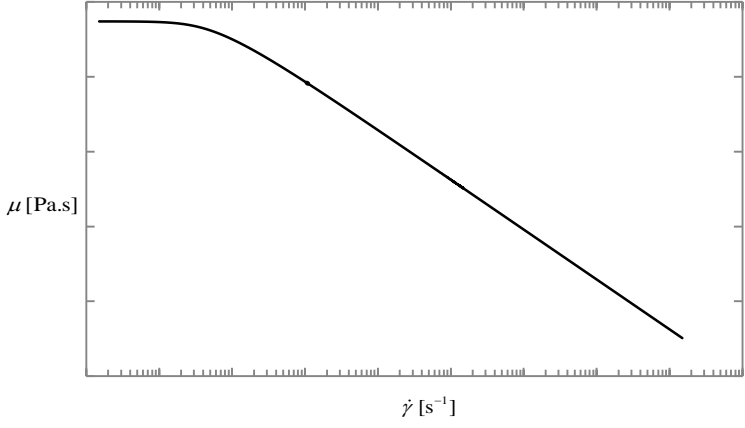
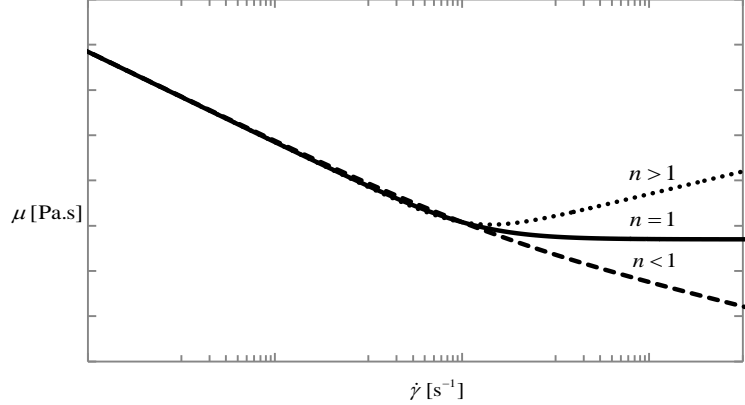
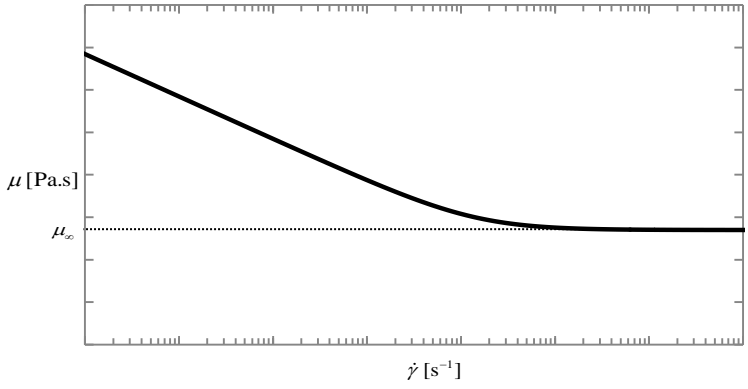
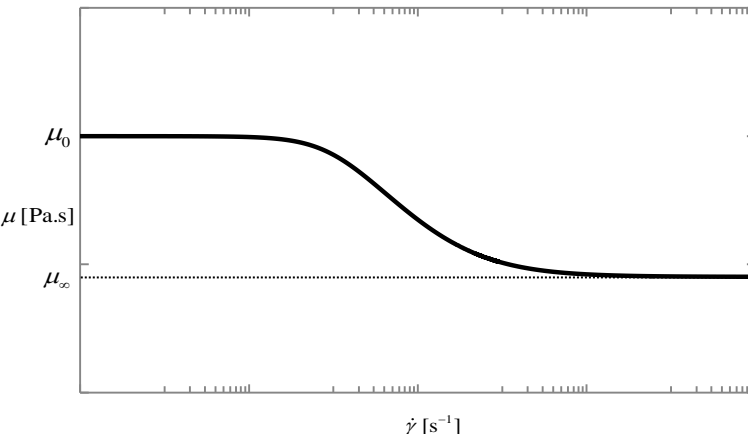
Fluidos	Representação gráfica das curvas de viscosidade consoante o modelo reológico utilizado
Lei de Potência	
sPTT	
Herschel-Bulkley e Bingham	

Tabela 1-4 - Representação gráfica de curvas de viscosidade típicas dos fluidos utilizados para o respectivo modelo reológico (continuação).

Casson	
Carreau-Yasuda	

Os gráficos da Tabela 1-4 foram retirados de Cruz (2010), e representam curvas de viscosidade típicas dos fluidos Carreau-Yasuda, Bingham, Casson, sPTT e Herschel-Bulkley. Estes gráficos representam a viscosidade dinâmica, μ , no eixo vertical, em função da taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, eixo horizontal utilizando coordenadas logarítmicas.

A Tabela 1-5 apresenta os valores dos parâmetros reológicos dos fluidos, bem como a dimensão da conduta, $R=H$, que serão usados ao longo deste trabalho e que foram igualmente utilizados nos trabalhos anteriores, Cruz (2010) e Silva (2012).

Tabela 1-5 - Propriedades características dos fluidos utilizados.⁸

sPTT	η [Pa · s]	ε [–]	λ [s]		H [m]	
	0,55	1,1	10		0,2	
Bingham e Herschel- Bulkley	$\mu_{\infty} \equiv K$ [Pa · s]		τ_0 [Pa]		n [–]	H [m]
	0,05		0,07		0,5	0,2
					1	
					1,5	
Casson	μ_{∞} [Pa · s]		τ_0 [Pa]		H [m]	
	0,55		0,062502		0,2	
Carreau- Yasuda	μ_{∞} [Pa · s]	μ_0 [Pa · s]	Λ [s]	a [–]	n [–]	H [m]
	0,08	1	10	1,5	0,2	0,2
	0,000108			2	0,358	

1.6 Estrutura da dissertação

Para além do presente capítulo, este trabalho está estruturado da seguinte forma, no capítulo 2 será, em primeiro lugar, mostrada a dedução de uma segunda expressão de cálculo do coeficiente de atrito para fluidos lei de potência a escoar entre placas paralelas e serão igualmente apresentadas as soluções analíticas dos perfis de velocidade, também para um escoamento entre placas paralelas, para os diversos fluidos a estudar neste trabalho.

O capítulo 3 ir-se-á debruçar sobre a avaliação do desempenho da aplicação do método simplificado ao cálculo do coeficiente de atrito, comparando os resultados obtidos por dois processos de cálculo do coeficiente de atrito com os resultados exatos, na maioria dos casos obtidos analiticamente.

⁸ Tabela adaptada de Silva (2012), pag. 56, Tabela 4.1.

Nos capítulos 4 e 5 será testado o desempenho da aplicação do método simplificado ao cálculo do número de Nusselt com fluxo de calor e temperatura constante na parede da conduta, respectivamente, onde os resultados obtidos pelo método simplificado serão comparados com os resultados exatos, obtidos, para todos os modelos reológicos, por via numérica.

Finalmente, no capítulo 6 apresentam-se as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

2 Expressões para o coeficiente de atrito e perfis de velocidade

Neste capítulo serão abordados dois assuntos importantes para este trabalho, nomeadamente a dedução de uma nova expressão de cálculo do coeficiente de atrito para fluidos lei de potência a escoar entre placas paralelas com base num novo número de Reynolds generalizado e a apresentação de soluções analíticas dos perfis de velocidade também para escoamento entre placas paralelas.

No caso dos perfis de velocidade serão apresentadas as respectivas expressões matemáticas para os diversos fluidos utilizados neste trabalho. Um fluido particular é o Carreau-Yasuda pois não possui uma expressão matemática para o perfil de velocidade, neste caso os valores de referência para a tensão de corte na parede, τ_w , e também posteriormente para o número de Nusselt, Nu , serão calculados exclusivamente de forma numérica.

2.1 Número de Reynolds generalizado e coeficiente de atrito

Nesta secção será apresentada a dedução de uma nova expressão do número de Reynolds generalizado, Re' , que permitirá posteriormente calcular o coeficiente de atrito de Darcy, f , num escoamento laminar de um fluido lei de potência entre placas paralelas. Esta expressão será uma das utilizadas no próximo capítulo para o cálculo do coeficiente de atrito pelo método simplificado, a outra será aquela dada pela expressão 1.31. Assim, serão comparados os valores de f obtidos por duas expressões muito semelhantes, mas que têm abordagens diferentes na sua génese, com o resultado exato, averiguando-se deste modo qual destas duas proporciona um resultado, baseado no método simplificado, mais correto.

O coeficiente de Darcy será dado pela seguinte expressão,

$$f = 96/Re' \quad (2.1)$$

por paralelismo com o que sucede com os fluidos Newtonianos a escoar entre placas paralelas. Para tal, da expressão anterior conclui-se que para fluidos Newtonianos a taxa de deformação na parede, $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}}$, no caso de um fluido a escoar entre placas paralelas, é dada pela seguinte expressão,

$$\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = \frac{\tau_w}{\mu} = \frac{6\bar{U}}{2H} = \frac{12\bar{U}}{D_H} \quad (2.2)$$

À semelhança do que se fez para definição do número de Reynolds generalizado em tubos de secção circular, Cruz *et al.* (2012), será com esta taxa de deformação que se irá calcular a viscosidade característica do fluido lei de potência, μ' , que se vai utilizar no cálculo do número de Reynolds generalizado, agora para o escoamento entre placas paralelas. Assim tem-se que,

$$\mu' = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}}} \quad (2.3)$$

onde a tensão de corte na parede, τ_w , neste caso de um fluido lei de potência a escoar entre placas paralelas é calculada a partir da equação reológica do fluido lei de potência ou seja,

$$\tau_w = K(\dot{\gamma}_w)^n \quad (2.4)$$

onde a taxa de deformação na parede, $\dot{\gamma}_w$ é obtida calculando a derivada na parede do perfil de velocidade, $u / \bar{U} = (2n+1)/(n+1) \left[1 - (y/H)^{(n+1)/n} \right]$, ou seja,

$$\dot{\gamma}_w = \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=H} = \frac{2n+1}{Hn} \bar{U} = \frac{2n+1}{3n} \frac{3\bar{U}}{H} = \left(\frac{2n+1}{3n} \right) \cdot \left(\frac{12\bar{U}}{D_H} \right) = \frac{2n+1}{3n} \dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} \quad (2.5)$$

Substituindo a expressão de $\dot{\gamma}_w$, equação (2.5), na expressão de τ_w , equação (2.4), pode-se calcular a viscosidade característica destes escoamento, através da equação (2.3),

$$\mu' = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}}} = \frac{K \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n \left(\frac{12\bar{U}}{D_H} \right)^n}{\frac{12\bar{U}}{D_H}} = K \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n \left(\frac{12\bar{U}}{D_H} \right)^{n-1} \quad (2.6)$$

Assim, a expressão do número de Reynolds generalizado para escoamento de fluidos lei de potência entre placas paralelas, equivalente à expressão de Metzner e Reed (1955) para escoamento de fluidos lei de potência no interior de tubos de secção circular, é dada pela seguinte equação,

$$Re' = \frac{\rho \bar{U} D_H}{\mu'} = \frac{\rho \bar{U} D_H}{K \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n \left(\frac{12\bar{U}}{D_H} \right)^{n-1}} = \frac{\rho \bar{U} D_H}{K \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n (\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}})^{n-1}} = \frac{\rho \bar{U}^{2-n} D_H^n}{K \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n 12^{n-1}} \quad (2.7)$$

De salientar que na expressão anterior o produto $K \left(12\bar{U}/D_H \right)^{n-1} = K \left(\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} \right)^{n-1}$ representa a viscosidade do fluido correspondente à taxa de deformação $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (12\bar{U}/D_H)$. O coeficiente de atrito de Darcy, para o escoamento entre placas paralelas de fluidos lei de potência, é pois dado por,

$$f = \frac{96}{Re'} = \frac{96}{\frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n K \left(\frac{12\bar{U}}{D_H} \right)^{n-1}}} = \frac{96}{\frac{\rho \bar{U}^{2-n} D_H^n}{12^{n-1} \left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n K}} \quad (2.8)$$

Esta expressão do coeficiente de fricção de Darcy é, para fluidos lei de potência, igual à deduzida por Kozicki *et al.* (1966) de acordo com Hartnett e Cho (1998), para placas paralelas, equação (1.31), como se demonstra seguidamente.

$$f = \frac{96}{Re'} = \frac{96}{\frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n+1}{3n} \right)^n K \left(\frac{8\bar{U}}{D_H} \right)^{n-1} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}}} = \frac{96}{\frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n K \left(\frac{8\bar{U}}{D_H} \right)^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)}} = \frac{64}{\frac{\rho \bar{U}^{2-n} D_H^n}{8^{n-1} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n K}} \quad (2.9)$$

Embora para um fluido lei de potência as expressões (2.8) e (2.9) conduzem ao mesmo resultado, para um fluido genérico como aqueles que vão ser testados neste trabalho, já não será o caso uma vez que na equação (2.8) a taxa de deformação a usar para obter a viscosidade do fluido será $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (12\bar{U}/D_H)$ e na equação (2.9) já é $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (8\bar{U}/D_H)$ o que fará com que os coeficientes de atrito obtidos através das duas expressões sejam diferentes. Deste modo, serão calculados dois coeficientes de atrito através do método simplificado, um pela equação (2.8) e outro pela equação (2.9) e averiguar-se-á qual das duas abordagens conduz a um resultado mais correto por comparação com o resultado exato.

2.2 Soluções analíticas para os perfis de velocidade

Nesta secção serão apresentados as expressões analíticas para os perfis de velocidade num escoamento totalmente desenvolvido entre placas paralelas em regime laminar para os diversos fluidos já referidos no capítulo 1 a utilizar neste trabalho. Inicialmente será feita uma breve referência aos fluidos Newtonianos podendo esta informação ser vista como complemento ao trabalho. Posteriormente serão então apresentadas as expressões dos perfis de velocidade dos fluidos não-Newtonianos. As expressões analíticas dos perfis de velocidade, formalmente mais compactas do que o que é habitual na literatura, para os fluidos de Casson e Herschel-Bulkley foram deduzidas no CEFT (Centro de Estudos de Fenómenos de Transporte). Também serão apresentadas as expressões que estão disponíveis na literatura para o caso dos fluidos sPTT e Bingham, este último é um caso particular do fluido Herschel-Bulkley, possuindo estas duas últimas uma forma de cálculo explícito da tensão de corte na parede conhecida a velocidade média ao contrário das anteriores. De referir ainda que nem todos os fluidos apresentam solução analítica, como é o caso do fluido Carreau-Yasuda.

2.2.1 Fluido Newtoniano

O perfil de velocidade de um fluido a escoar entre duas placas paralelas não possui sempre a mesma configuração, como se poder visualizar na Figura 2-1, existindo duas regiões distintas, região de entrada hidrodinâmica e região hidrodinâmica completamente desenvolvida, sendo que é nesta última que incide o presente trabalho.

Partindo de uma velocidade constante, devido à condição de não escorregamento as partículas do fluido que entram em contacto com a parede da placa ficam com velocidade nula. É esta a camada que proporciona que as restantes camadas adjacentes do fluido tenham uma velocidade cada vez mais lenta devido ao atrito existente entre elas. Assim, para que o caudal se mantenha constante é necessário então que a velocidade no centro da conduta aumente, resultando assim num gradiente de velocidade que se desenvolve ao longo desta.

Existe ainda um conceito importante para a identificação das regiões do escoamento e assim perceber o desenvolvimento do perfil de velocidade ao longo das placas, o conceito de camada limite hidrodinâmica. Como se pode verificar na Figura 2-

1, linha mais grossa, a espessura desta camada limite aumenta ao longo do desenvolvimento do escoamento, pelo que possuiu espessura máxima quando o perfil de velocidade encontra-se inalterado, ou seja, completamente desenvolvido. De referir ainda que a região onde se desenvolve a camada limite e por sua vez o perfil de velocidade, é a região do escoamento onde os efeitos das forças de corte causadas pela viscosidade do fluido se fazem sentir (Çençel *et al.*, 2007).

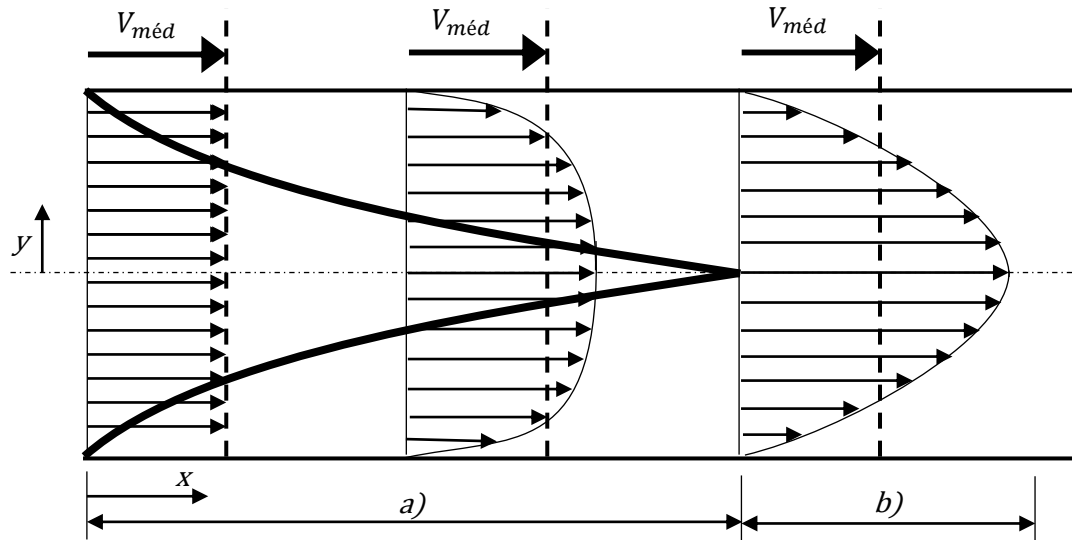


Figura 2-1 - Representação do desenvolvimento do perfil de velocidade de um fluido Newtoniano ao longo de uma conduta não circular, placas paralelas, sendo a região a) a região de entrada hidrodinâmica e a região b) a região desenvolvida.⁹

Como se pode visualizar na figura anterior, na região completamente desenvolvida – região b), o perfil de velocidade tem uma configuração parabólica, onde a velocidade é igual a zero na parede, devido à condição de não escorregamento, como já referido anteriormente, e a velocidade é máxima no centro entre as placas paralelas. A expressão (2.10) traduz o perfil de velocidade para um fluido Newtoniano a escoar entre placas paralelas, quando este está completamente desenvolvido (Çençel *et al.*, 2007).

$$u(y) = \frac{3}{2} \bar{U} \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right) \quad (2.10)$$

⁹ Imagem adaptada de Çençel *et al.* (2007), pag.281, Figura 8-8.

2.2.2 Fluido sPTT

De acordo com Oliveira e Pinho (1999), para o caso do modelo sPTT, o perfil de velocidades é dado pela seguinte expressão, válida para tubos de secção circular e placas paralelas,

$$\frac{u}{\bar{U}} = \frac{3+n}{2} \frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} (1-r^{*2}) \left[1 + a(1+r^{*2}) \right] \quad (2.11)$$

sendo o parâmetro a dado por,

$$a = (3+n)^2 \varepsilon Wi^2 \left(\frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} \right)^2 \quad (2.12)$$

No caso específico da placas paralelas $n=0$ e $r^* = y/H$, assim,

$$\frac{u}{\bar{U}} = \frac{3}{2} \frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} \left(1 - \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right) \left\{ 1 + 9\varepsilon Wi^2 \left(\frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{y}{H} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.13)$$

De referir que, segundo Pinho e Coelho (2009), para um escoamento dinamicamente desenvolvido a solução hidrodinâmica depende apenas do produto εWi^2 onde $Wi = \lambda \bar{U}/H$ é o número de Weissenberg e ε representa um parâmetro adimensional de extensibilidade do modelo reológico sPTT que limita a viscosidade extensional (Cruz, 2010). Para baixos valores de ε , verifica-se que a viscosidade extensional de estado estacionário é inversamente proporcional a ε .

A expressão (2.14) traduz uma forma explícita do parâmetro \bar{U}_N/\bar{U} , razão entre a velocidade média de um fluido Newtoniano, num escoamento sujeito ao mesmo gradiente de pressão, \bar{U}_N , e a velocidade média do escoamento, \bar{U} , sendo este função de ε e λ , parâmetro reológicos, e \bar{U} e H , características do escoamento. (Coelho e Pinho, 2008)

$$\frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} = \frac{10^{1/3} \left\{ \left[\sqrt{729\varepsilon Wi^2 + 10} + 27\sqrt{\varepsilon Wi^2} \right]^{1/3} - \left[\sqrt{729\varepsilon Wi^2 + 10} - 27\sqrt{\varepsilon Wi^2} \right]^{1/3} \right\}}{18\sqrt{\varepsilon Wi^2}} \quad (2.14)$$

sendo que a velocidade média para um escoamento de um fluido Newtoniano sujeita ao mesmo gradiente de pressões, onde η é o coeficiente de viscosidade, é dada pela seguinte expressão,

$$\bar{U}_N = \frac{-H^2 \left(\frac{dp}{dx} \right)}{3\eta} \quad (2.15)$$

Por sua vez conhecendo a expressão (2.15) é possível simplificar a expressão da energia dissipada por atrito viscoso ao longo do escoamento por unidade de área, expressão (2.16), obtendo assim uma expressão para o cálculo da tensão de corte na parede mais simples e independente do gradiente de pressões tal como se pode verificar na expressão (2.17).

$$\tau_w \bar{U} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{\bar{U}A}{P} \quad (2.16)$$

sendo A e P a área e perímetro da secção, respetivamente.

$$\tau_w = 12\eta \frac{\bar{U}}{D_H} \frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} \quad (2.17)$$

2.2.3 Fluido Herschel-Bulkley

A dedução de perfis de velocidade a partir do conhecimento do modelo reológico de um dado fluido tem início num balanço de conservação de quantidade de movimento num escoamento num troço de conduta como aquele representado na Figura 2-2.

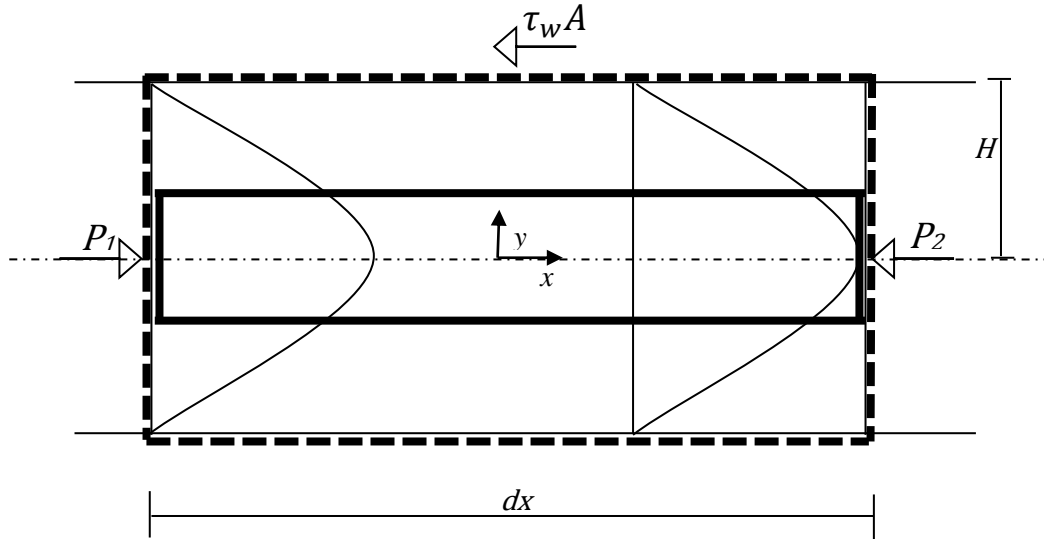


Figura 2-2 - Representação de dois volumes de controle, um a linha tracejada e outro a linha contínua, num escoamento completamente desenvolvido ao longo de uma conduta não circular, placas paralelas.

Sabendo que,

$$\begin{cases} \sum F_x = m(\bar{U}_s - \bar{U}_e) = 0 \\ P_1 - P_2 = dP \end{cases} \quad (2.18)$$

do balanço de forças na direção xx ao volume de controle maior, linha tracejada, resulta que,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\tau_w}{H} \quad (2.19)$$

através do balanço de forças ao volume de controle a linha contínua, mais pequeno, de uma forma idêntica resulta que,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\tau(y)}{y} \quad (2.20)$$

assim, da igualdade das duas expressões anteriores, uma vez que o gradiente de pressão é o mesmo, conclui-se que

$$\frac{\tau_w}{H} = \frac{\tau(y)}{y} \quad (2.21)$$

De referir, que esta expressão é genérica e portanto independente do fluido utilizado. A igualdade anterior é a base para a determinação do perfil analítico de velocidades como se verá no exemplo de cálculo que se segue para um fluido Herschel-Bulkley. Para isso, tendo em conta a expressão inicial do respectivo modelo reológico, enunciada no capítulo 1, na Tabela 1-3,

$$\begin{cases} \mu = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K \dot{\gamma}^{n-1} \Leftrightarrow \tau = \tau_0 + K \dot{\gamma}^n & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2.22)$$

e sabendo que,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= -\frac{du}{dy} \\ \tau &= \frac{y}{H} \tau_w \end{aligned} \quad (2.23)$$

A expressão (2.22) é reduzida na expressão (2.24),

$$\begin{cases} \tau_w \frac{y}{H} = \tau_0 + K \left(-\frac{du}{dy} \right)^n & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \frac{du}{dy} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

A integração da equação diferencial resultante conduz à expressão analítica do perfil de velocidades. No caso presente, de forma a simplificar a expressão do perfil de velocidade realizou-se a seguinte mudança de variável $y^+ = y/(Hc)$ com $c = \tau_0/\tau_w$ surgindo também a variável $a = \left[\tau_0 / K (\bar{U}/H)^n \right]^{1/n}$ o que resulta no seguinte perfil de velocidade.

$$\frac{u}{\bar{U}} = \begin{cases} \frac{a \cdot n \cdot c^{-1/n} \cdot (1-c)^{(n+1)/n}}{n+1} - \frac{a \cdot n \cdot c \cdot (y^+ - 1)^{(n+1)/n}}{n+1} & \text{para } 1 < y^+ < \frac{1}{c} \\ \frac{a \cdot n \cdot c^{-1/n} \cdot (1-c)^{(n+1)/n}}{n+1} & \text{para } 0 < y^+ < 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

A constante a relaciona-se com a constante c através da seguinte expressão,

$$a = \left[\frac{\tau_0}{K \left(\bar{U}/H \right)^n} \right]^{1/n} = \frac{c^{1/n} (1-c)^{-(n+1)/n} (n+1)(2n+1)}{n(c \cdot n + n + 1)} \quad (2.26)$$

expressão esta obtida sabendo-se que,

$$\frac{\int_0^{1/c} u/\bar{U} dy^+}{1/c} = 1 \quad (2.27)$$

A expressão 2.26 permite pois obter de forma explícita a velocidade média conhecendo a tensão de corte na parede, já o contrário não é possível.

2.2.4 Fluido de Bingham

Nesta secção será apresentada a expressão do perfil de velocidades para o fluido de Bingham, este é derivado do perfil de velocidades para o modelo Herschel-Bulkley já que o modelo de Bingham é um caso particular do modelo Herschel-Bulkley, onde $n=1$ e $\mu_\infty \equiv K$. Nas equações (2.28) e (2.29) apresenta-se a expressão matemática do referido perfil.

$$\frac{u}{\bar{U}} = \begin{cases} \frac{a \cdot (1-c)^2}{c \cdot 2} - \frac{a \cdot c \cdot (y^+ - 1)^2}{2} & \text{para } 1 < y^+ < \frac{1}{c} \\ \frac{a \cdot (1-c)^2}{c \cdot 2} & \text{para } 0 < y^+ < 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

com a obtido fazendo $n=1$ na equação (2.26), ou seja,

$$a = \frac{\tau_0}{\mu_\infty \left(\bar{U}/H \right)} = \frac{c6}{(1-c)^2(c+2)} \quad (2.29)$$

Neste caso é possível encontrar uma relação explícita entre a velocidade média na conduta e a tensão de corte na parede. De acordo com Coelho e Pinho (2008), a expressão (2.30) traduz a razão entre a velocidade média de um fluido Newtoniano e a velocidade média,

$$\frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} = \left[1 - \frac{3}{2}c + \frac{1}{2}c^3 \right]^{-1} \quad (2.30)$$

sendo a tensão de corte na parede dada por,

$$\tau_w = 12\mu_\infty \frac{\bar{U}}{D_H} \frac{\bar{U}_N}{\bar{U}} \quad (2.31)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (2.30) e resolvendo em ordem a $c = \tau_0/\tau_w$, obtém-se a seguinte expressão explícita para a tensão de corte na parede,

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\tau_0}{\tau_w} = \frac{2}{3} \sqrt{3(2U^+ + 3)} \sin \left\{ \frac{1}{3} \arctan \left[\frac{3\sqrt{6}}{2\sqrt{U^+(4U^{+2} + 18U^+ + 27)}} \right] \right\} \\ com U^+ = \frac{\bar{U}}{D_H \tau_0 / (12\mu_\infty)} \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

2.2.4 Fluido de Casson

A obtenção do perfil de velocidade do modelo de Casson segue a mesma metodologia que a referida para o modelo de Herschel-Bulkley. Desta forma, a expressão (2.33) traduz a solução analítica do perfil de velocidade.

$$\frac{u}{\bar{U}} = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{a \left[c^2(3y^{+2} - 8y^{+3/2} + 6y^+) - 6c + 8\sqrt{c} - 3 \right]}{6c} & \text{para } 1 < y^+ < 1/c \\ -\frac{a(c^2 - 6c + 8\sqrt{c} - 3)}{6c} & \text{para } 0 < y^+ < 1 \end{array} \right. \quad (2.33)$$

onde a é dado por $\tau_0/(\mu_\infty \bar{U}/H)$, $y^+ = y/(Hc)$ e $c = \tau_0/\tau_w$. Da mesma forma que anteriormente, para o modelo de Casson a constante a também pode ser relacionada com a constante c , tal como mostra a expressão (2.34),

$$a = \frac{\tau_0}{\mu_\infty \bar{U}/H} = -\frac{30c}{c^3 - 15c + 24\sqrt{c} - 10} \quad (2.34)$$

À semelhança do que sucedia com o fluido Herschel-Bulkley, a expressão anterior permite obter de forma explícita a velocidade média na conduta, conhecido o fluido e a tensão de corte na parede.

2.2.5 Fluido Carreau-Yasuda

Para o perfil de velocidade deste modelo não existe solução analítica na literatura, sendo que o seu cálculo será feito numericamente. Se for feita uma observação mais próxima das expressões (2.23) e da expressão reológica do modelo em questão, pode-se constatar que após a devida substituição destas variáveis, existe uma impossibilidade de integrar analiticamente a expressão resultante, equação (2.35).

$$\dot{\gamma} = -\frac{du}{dy} \quad (2.23)$$

$$\tau = \frac{y}{H} \tau_w$$

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{(n-1)}{a}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{H} \tau_w = \left(-\frac{du}{dy} \right) \left\{ \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + \left(-\frac{du}{dy} \Lambda \right)^a \right]^{\frac{(n-1)}{a}} \right\} \quad (2.35)$$

2.3 Grupos adimensionais

Para o estudo da aplicação do método simplificado ao coeficiente de atrito e número de Nusselt, apresentados nos próximos capítulos, será imprescindível definir os grupos adimensionais relevantes para cada modelo reológico, dos quais depende o perfil de velocidade adimensional e consequentemente a transferência de calor. Desta forma, a Tabela 2-1 apresenta os grupos adimensionais que surgem dos perfis de velocidade adimensionais, u / \bar{U} referidos anteriormente.

Tabela 2-1 - Grupos adimensionais para a representação dos resultados de transferência de calor.

Modelos	Grupos Adimensionais
sPTT	$\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$
Herschel-Bulkley	$K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$
Bingham	$1/Bn = K \bar{U} / \tau_0 H$ com $K \equiv \mu_{\infty}$
Casson	$\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$
Carreau-Yasuda	$\Lambda \bar{U} / H$

3 Coeficiente de atrito obtido pelo método simplificado

Este capítulo ir-se-á debruçar sobre a avaliação do desempenho da aplicação do método simplificado ao cálculo do coeficiente de atrito para os vários fluidos estudados neste trabalho. Deste modo, serão assim testados dois processos de cálculo do coeficiente de atrito através do método simplificado designados por f'' e f''' , conforme se verá na próxima secção.

Após os devidos cálculos, averiguar-se-á o desempenho de f'' e f''' por comparação com a expressão do coeficiente de atrito exata, f , mencionando o erro máximo encontrado. Desta forma, para cada fluido, serão traçados dois gráficos, um representando as variações, com o número de Reynolds generalizado, do coeficiente de atrito obtido pelo método simplificado, que apresentar um menor erro, e do coeficiente de atrito exato, f e um segundo gráfico com a variação dos erros inerentes a f'' e f''' também em função do número de Reynolds generalizado. Na parte final do capítulo será feito um resumo deste com a apresentação de uma tabela com o resumo dos erros obtidos e uma representação gráfica do coeficiente de atrito obtido pelo método simplificado, para os vários fluidos em simultâneo.

3.1 Processo de cálculo

Nesta secção serão apresentados os processos de cálculo dos dois coeficientes de atrito, f'' e f''' , ambos obtidos pela aplicação do método simplificado mas utilizando abordagens ligeiramente distintas. De referir que estes dois coeficientes de atrito serão calculados tendo como base as expressões (2.8) e (2.9), sendo a primeira a do coeficiente de atrito para escoamento entre placas paralelas, deduzida do presente trabalho, e a segunda, deduzida por Kozicki *et al.* (1966) de acordo com Hartnett e Cho (1998), para escoamento em tubos de secção circular com uma correção subjacente para ser válida no caso de placas paralelas.

Para todos os fluidos, é pois necessário o cálculo de dois números de Reynolds generalizados, Re'' e Re''' , já que os coeficientes de atrito, f'' e f''' , são função destes como mostram as seguintes expressões.

$$f'^I = 64 / Re'^I \quad (3.1)$$

$$f'^{II} = 96 / Re'^{II} \quad (3.2)$$

Os valores do número de Reynolds generalizados, Re'^I e Re'^{II} , expressões (3.4) e (3.5), respectivamente, têm como origem as expressões apresentadas no capítulo 2, expressões (2.8) e (2.9) para fluidos lei de potência e que para um fluido genérico o n deverá ser substituído por n' , como se pode verificar de seguida.

$$f'^I = \frac{64}{Re'^I} = \frac{96}{\frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n'+1}{2n'} \right)^{n'} K \left(\frac{8\bar{U}}{D_H} \right)^{n'-1} \left(\frac{2}{3} \right)}} \quad (2.9)$$

$$f'^{II} = \frac{96}{Re'^{II}} = \frac{96}{\frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n'+1}{3n'} \right)^{n'} K \left(\frac{12\bar{U}}{D_H} \right)^{n'-1}}} \quad (2.8)$$

Sabendo que na expressão (2.9) o produto $K \left(8\bar{U}/D_H \right)^{n'-1} = K \left(\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} \right)^{n'-1}$ representa a viscosidade de um fluido genérico para uma taxa de deformação $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = \left(8\bar{U}/D_H \right)$, $\mu_{(\dot{\gamma}=8\bar{U}/D_H)}$, e que na expressão (2.8) $K \left(12\bar{U}/D_H \right)^{n'-1} = K \left(\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} \right)^{n'-1}$ representa a viscosidade de um fluido genérico à taxa de deformação $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = \left(12\bar{U}/D_H \right)$, $\mu_{(\dot{\gamma}=12\bar{U}/D_H)}$, visto que $\mu = K \left(\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} \right)^{n'-1}$, obtêm-se as expressões de cálculo de Re'^I e Re'^{II} , equações 3.3 e 3.4, mais práticas de utilizar no caso de um fluido genérico, pois evitam a necessidade de se determinar um índice de consistência, K , para cada valor de $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}}$ como se pode verificar de seguida,

$$Re'^I = \frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n'+1}{2n'} \right)^{n'} \mu_{(\dot{\gamma}=8\bar{U}/D_H)}} \quad (3.3)$$

$$Re'' = \frac{\rho \bar{U} D_H}{\left(\frac{2n'+1}{3n'} \right)^{n'} \mu_{(\dot{\gamma}=12\bar{U}/D_H)}} \quad (3.4)$$

Na expressão (3.3) a viscosidade é calculada para a mesma taxa de deformação na parede de um escoamento laminar de um fluido Newtoniano num tubo de secção circular, $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (8\bar{U}/D_H)$, e na expressão (3.4) a viscosidade é calculada para a mesma taxa de deformação na parede de um escoamento laminar de um fluido Newtoniano entre placas paralelas $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (12\bar{U}/D_H)$. Como se viu na secção 2.1, para fluidos lei de potência, também conhecidos por Ostwald-de Waele, as duas expressões dão origem ao mesmo valor de número de Reynolds, isto para os mesmos valores de \bar{U} e de D_H . Contudo, para outros modelos reológicos já tal não sucede dado a viscosidade variar com a taxa de deformação de forma diferente daquela do modelo lei de potência.

Como o coeficiente de atrito depende directamente do número de Reynolds generalizado, Re' , para a obtenção dos resultado será necessário conhecer a velocidade média, \bar{U} , o diâmetro hidráulico, D_H , e as restantes características reológicas de cada fluido, apresentadas na Tabela 1-5. Assim, será possível o cálculo da taxa de deformação característica, $\dot{\gamma}$, onde para f'' , $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (8\bar{U}/D_H)$ e para f''' , $\dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = (12\bar{U}/D_H)$, que posteriormente será utilizado para o respetivo cálculo do índice de potência aparente, n' , expressões de cálculo apresentadas na Tabela 1-1, e da viscosidade, μ , onde as expressões correspondentes encontram-se na Tabela 1-3. Após os devidos cálculos será então possível a obtenção dos dois números de Reynolds generalizados, Re'' e Re''' . Posteriormente, averiguar-se-á qual das duas abordagens conduz a um resultado mais correto por comparação com o resultado exato do cálculo de f utilizando para tal a expressão para o erro dada pela equação (1.13), $|f - f'|/f \%$, sendo também mencionado para cada caso o erro máximo obtido. Os erros encontrados, tanto para f'' como para f''' , serão representados graficamente em função do número de Reynolds generalizado. Também será representado graficamente a variação, com o número de Reynolds generalizado, do coeficiente de atrito obtido pelo método

simplificado que apresentar um menor erro. De referir que os erros foram avaliados para cerca de 1500 valores distintos de \bar{U}/D para cada um dos fluidos estudados.

O valor exato do coeficiente de atrito foi calculado partindo da definição deste, expressão (3.5),

$$f = \frac{\tau_w 8}{\rho \bar{U}^2} \quad (3.5)$$

Para o fluido sPTT, a tensão de corte na parede, τ_w , foi calculada impondo o valor da velocidade média, \bar{U} , e usando a solução analítica presente na equação (2.17). Para os fluidos com tensão de cedência, o valor de τ_w foi imposto e a velocidade média calculada partindo das expressões de cálculo do parâmetro adimensional a : fluido de Herschel-Bulkley equação (2.26); fluido de Bingham equação (2.29); fluido de Casson equação (2.34). Para o fluido de Carreau-Yasuda a tensão de corte na parede foi calculada por integração numérica da equação $du/dy = \dot{\gamma}(y)$ recorrendo a um processo descrito por Silva (2012).

3.2 Resultados

3.2.1 Modelo sPTT

Para o cálculo de Re^{II} e Re^{III} do fluido sPTT foi necessário o cálculo da viscosidade característica, μ , expressão (3.6), e o índice de potência aparente, n' , expressão (3.7). De referir que estas expressões estão também presentes na Tabela 1-1 e Tabela 1-3, respectivamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \eta \cdot \left[1 + \frac{(b-1)^2}{3b} \right] \\ b = \left(c + \sqrt{c^2 - 1} \right)^{1/3} \\ c = 1 + 27\varepsilon (\lambda \dot{\gamma})^2 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n' = \frac{w^{1/3}(zw^{4/3} + 2\sqrt{3}(243f^2 + 81f + 4)y + z(162f^2 + 48f + 1)) + \sqrt{3}(1944f^2 + 297f + 10)y + z(648f^2 + 75f + 1)}{z((w^{4/3} + 2\sqrt{3}zy + 486f^2 + 54f + 1)w^{1/3} + \sqrt{3}(108f + 5)y + 972f^2 + 81f + 1)} \\ f = \varepsilon \lambda^2 \gamma^2 \\ y = \sqrt{f \cdot z} \\ w = 3\sqrt{3}\sqrt{f \cdot z} + 27f + 1 \\ z = 27f + 2 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Foi também necessário arbitrar as características reológicas do fluido sPTT, Tabela 3-1, para os devidos cálculos, apesar dos resultados adimensionais finais serem genéricos, sendo assim válidos para qualquer fluido sPTT.

Tabela 3-1 - Propriedades reológicas do fluido sPTT utilizado.

sPTT	η [Pa · s]	ε [-]	λ [s]	H [m]
	0,55	1,1	10	0,2

Após os devidos cálculos para os cerca de 1500 valores de \bar{U} foi possível encontrar os valores dos coeficientes de atrito, f' e f'' , pelo método simplificado e respectivos erros. Para o cálculo dos erros, expressão (1.13), foi necessário, em primeiro lugar, a determinação do coeficiente de atrito exato, f , expressões (2.17) e (3.5).

$$\varepsilon_{f'} = \frac{|f - f'|}{f} \times 100\% \quad (1.13)$$

Desta forma, o erro máximo registado entre f' e o coeficiente de atrito exato, f , foi de 2,06% e para f'' obteve-se um erro máximo inferior, 0,97%, pelo que este origina uma melhor aproximação ao coeficiente de atrito exato. Após esta análise foi possível traçar um gráfico, Figura 3-1, com f'' e f a variar ao longo do número de Reynolds generalizado correspondente, Re'' .

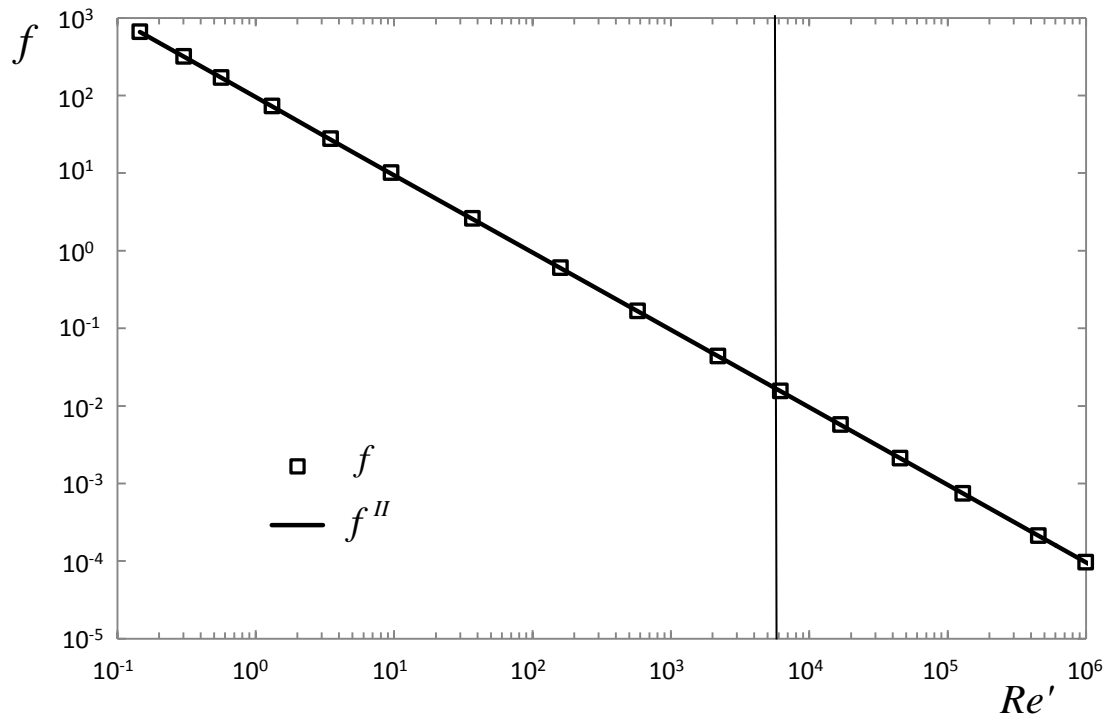


Figura 3-1 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re' , para o fluido sPTT. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; \square coeficiente de atrito exato, f .

Para todos os fluidos estudados, apesar da análise do erro ter sido feita para cerca de 1500 pontos, não existe interesse prático na análise de valores de Reynolds superiores a 6000, daí a representação de uma linha vertical para delimitar o regime laminar.

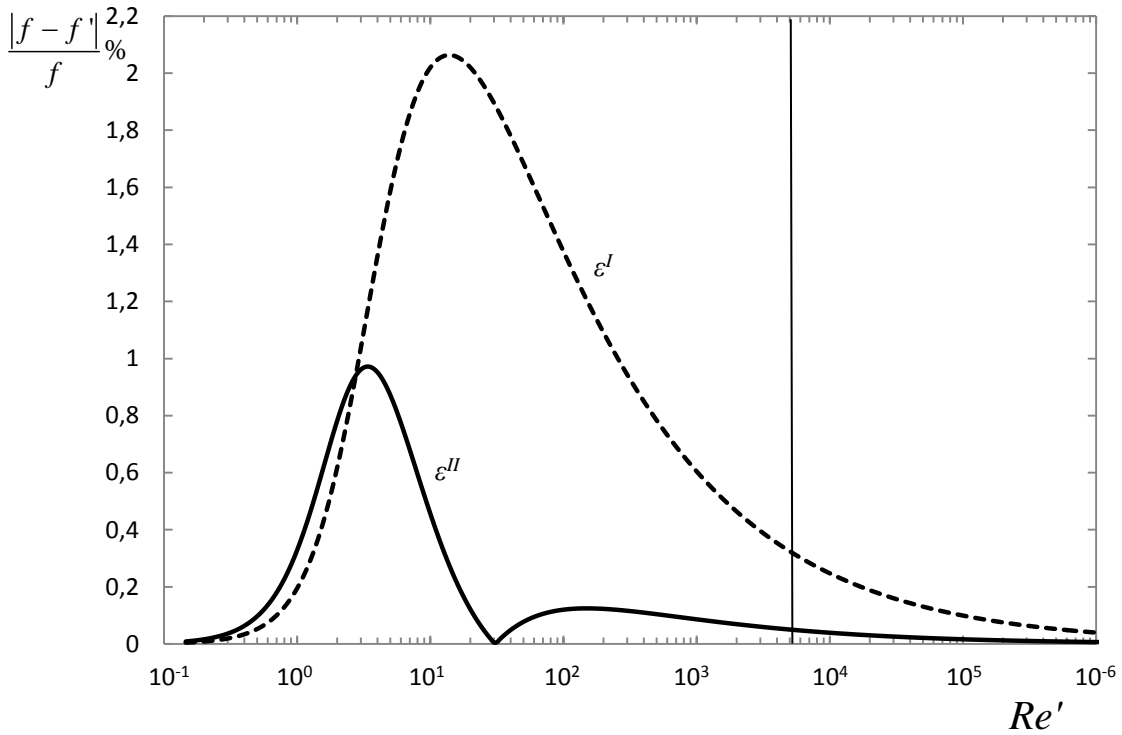


Figura 3-2 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re' , para o fluido sPTT. Linhas: ----- ε^I ; — ε^{II} .

Na Figura 3-2 apresenta-se a variação do erro encontrado, ε^I e ε^{II} , para os dois coeficientes de atrito calculados, em função do número de Reynolds generalizado, para uma melhor percepção do comportamento destes.

3.2.2 Modelo Herschel-Bulkley

Para o teste do coeficiente de atrito pelo método simplificado no modelo Herschel-Bulkley foi utilizado o mesmo método de cálculo que no modelo sPTT. Desta forma para o cálculo da viscosidade e do índice de potência aparente, para o modelo Herschel-Bulkley, foram utilizadas as seguintes expressões,

$$\begin{cases} \mu = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + K\dot{\gamma}^{n-1} & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$n' = \frac{nK\dot{\gamma}^n}{\tau_0 + K\dot{\gamma}^n} \quad (3.9)$$

Como referido anteriormente, ao contrário do que acontece no modelo sPTT, a velocidade média, \bar{U} , para os modelos Herschel-Bulkley e Casson, não é um parâmetro de entrada, sendo que, para o modelo Herschel-Bulkley, a partir da expressão (2.26) foi possível obter de forma explícita a velocidade média arbitrando a tensão de corte na parede.

$$a = \left[\frac{\tau_0}{K (\bar{U}/H)^n} \right]^{1/n} = \frac{c^{1/n} (1-c)^{-(n+1)/n} (n+1)(2n+1)}{n(c \cdot n + n + 1)} \quad (2.26)$$

com $c = \tau_0/\tau_w$

No caso do modelo Herschel-Bulkley utilizaram-se 3 fluidos, como mostra a Tabela 3-2. De referir que quando $n = 1$ está-se na presença do fluido de Bingham.

Tabela 3-2 - Propriedades reológicas dos três fluidos de Herschel-Bulkley utilizados.

Bingham e Herschel- Bulkley	$\mu_\infty \equiv K [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\tau_0 [\text{Pa}]$	$n [-]$	$H [\text{m}]$
	0,05	0,07	0,5 1 1,5	0,2

No caso de $n = 0,5$, após os devidos cálculos, o erro máximo encontrado para f'^I foi de 3,20%, enquanto que f'^{III} apresentou um erro máximo de 2,13%. Assim, foi possível apresentar a variação dos coeficientes de atrito, f'^{III} e f , bem como a variação dos erros encontrados para f'^I e f'^{III} em função do número de Reynolds generalizado, Re'^{III} , para $n = 0,5$, figuras 3-3 e 3-4, respetivamente.

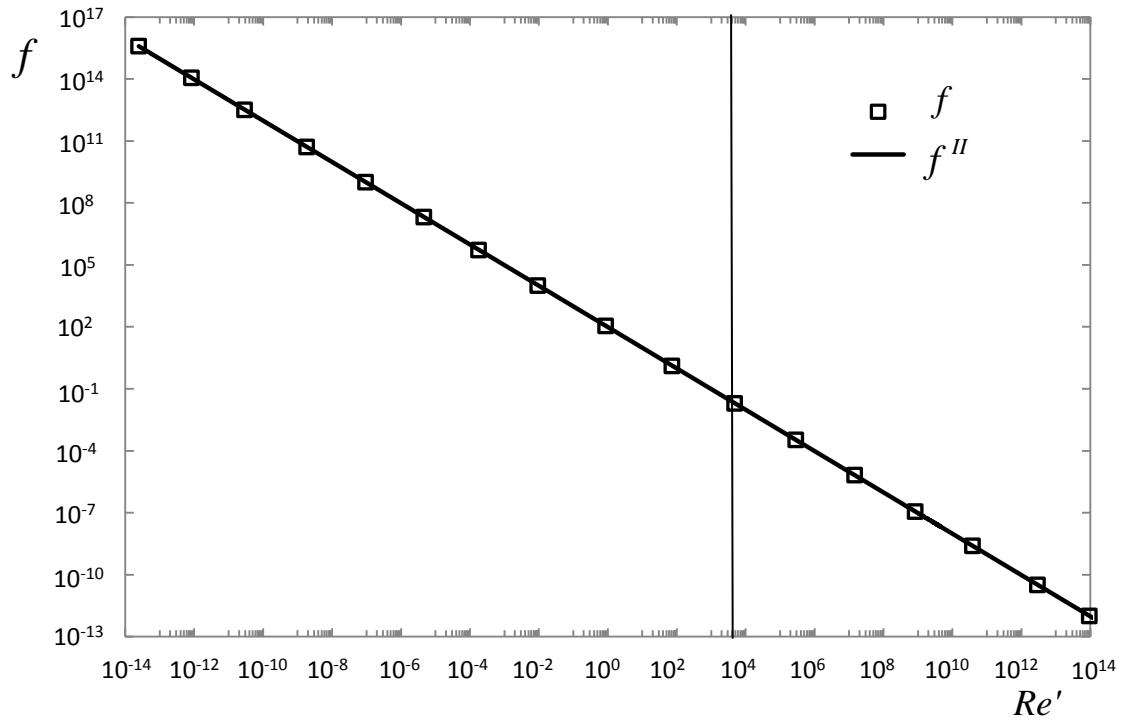


Figura 3-3 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re' , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; \square coeficiente de atrito exato, f .

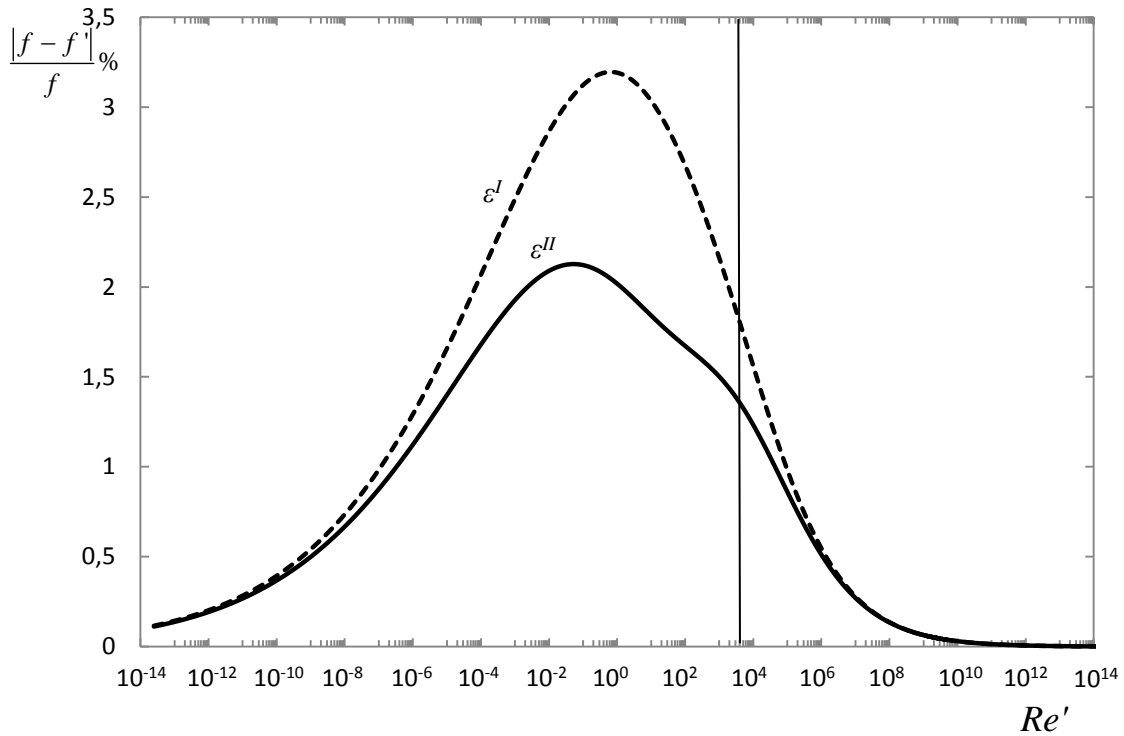


Figura 3-4 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re' , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$. Linhas: - - - ε^I ; — ε^{II} .

Para $n = 1$, fluido de Bingham, o erro máximo encontrado foi de 6,42% para f'^I e 4,34% para f'^{II} . As figuras 3-5 e 3-6 apresentam a variação dos coeficientes de atrito, f'^{II} e f , e dos erros encontrados para f'^I e f'^{II} em função de Re'^{II} respectivamente.

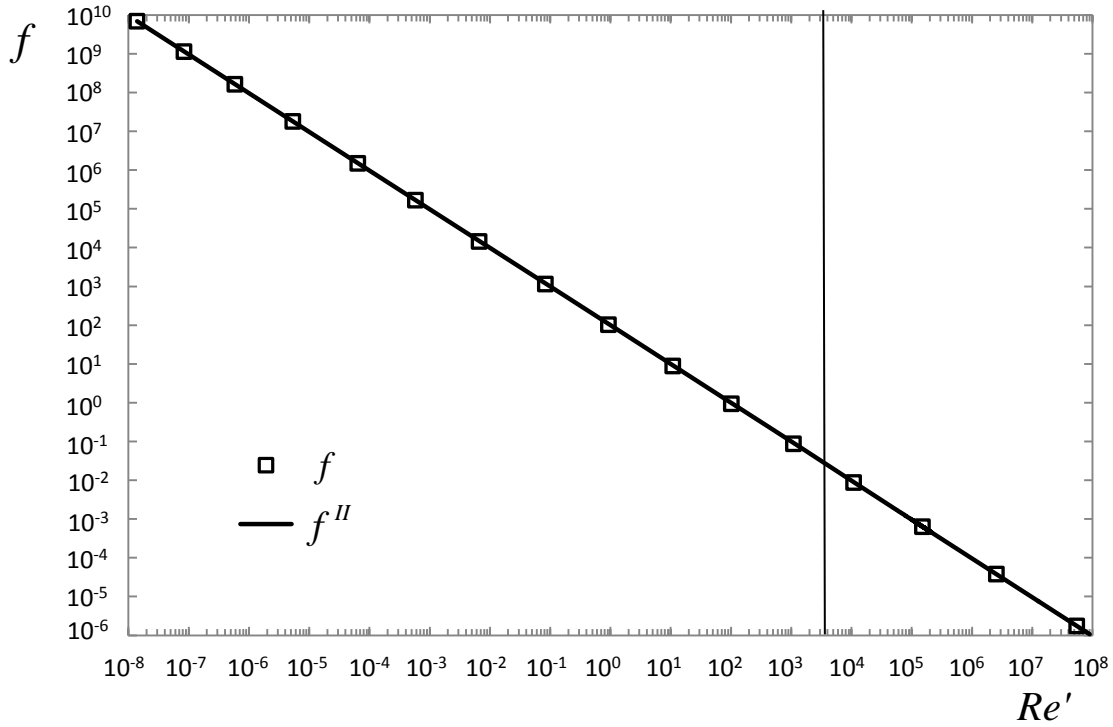


Figura 3-5 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re'^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f'' ; □ coeficiente de atrito exato, f .

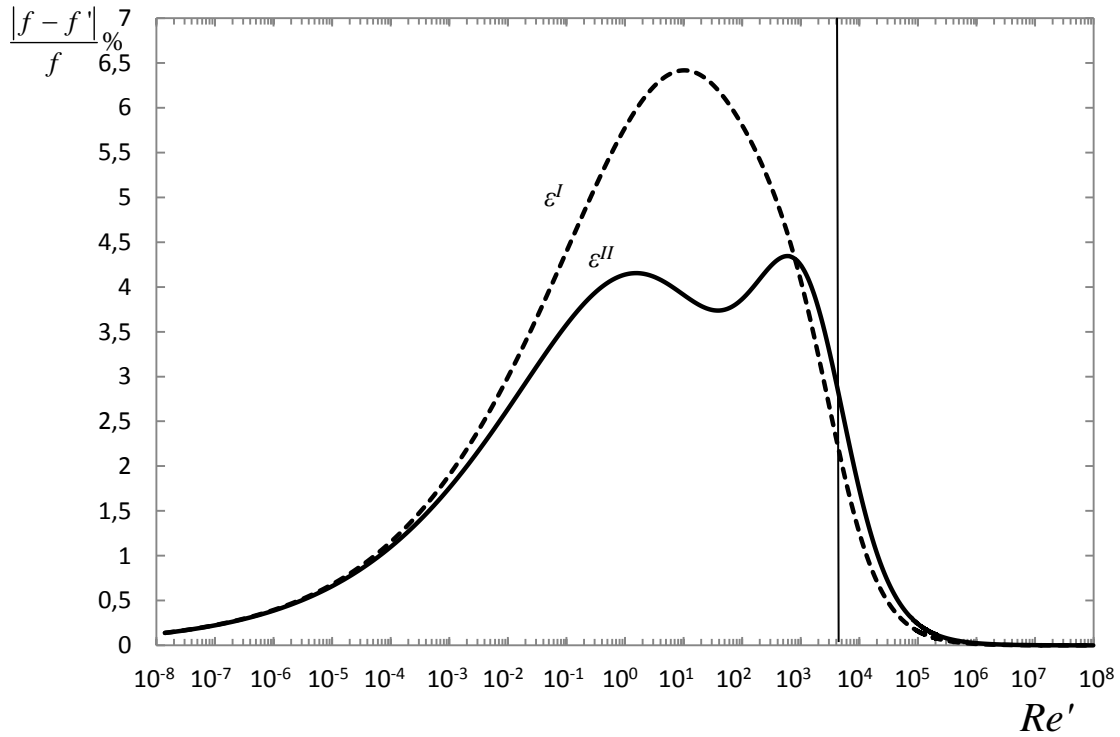


Figura 3-6 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re''' , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$. Linhas: - - - - ε^I ; — ε^{II} .

Para $n = 1,5$ o erro máximo encontrado para f'^I foi de 9,30% e para f'^{II} foi de 8,42%. As figuras 3-5 e 3-6 apresentam a variação dos coeficientes de atrito, f'^{II} e f , e dos erros encontrados para f'^I e f'^{II} em função de Re''' , respetivamente.

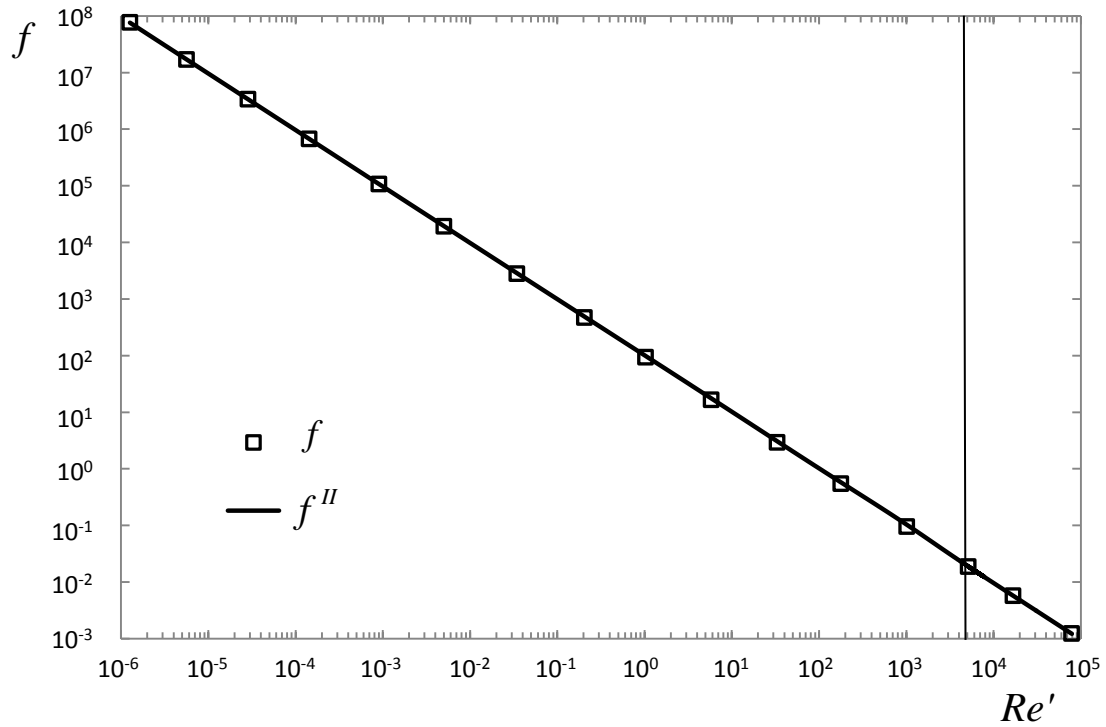


Figura 3-7 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re'^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; \square coeficiente de atrito exato, f .

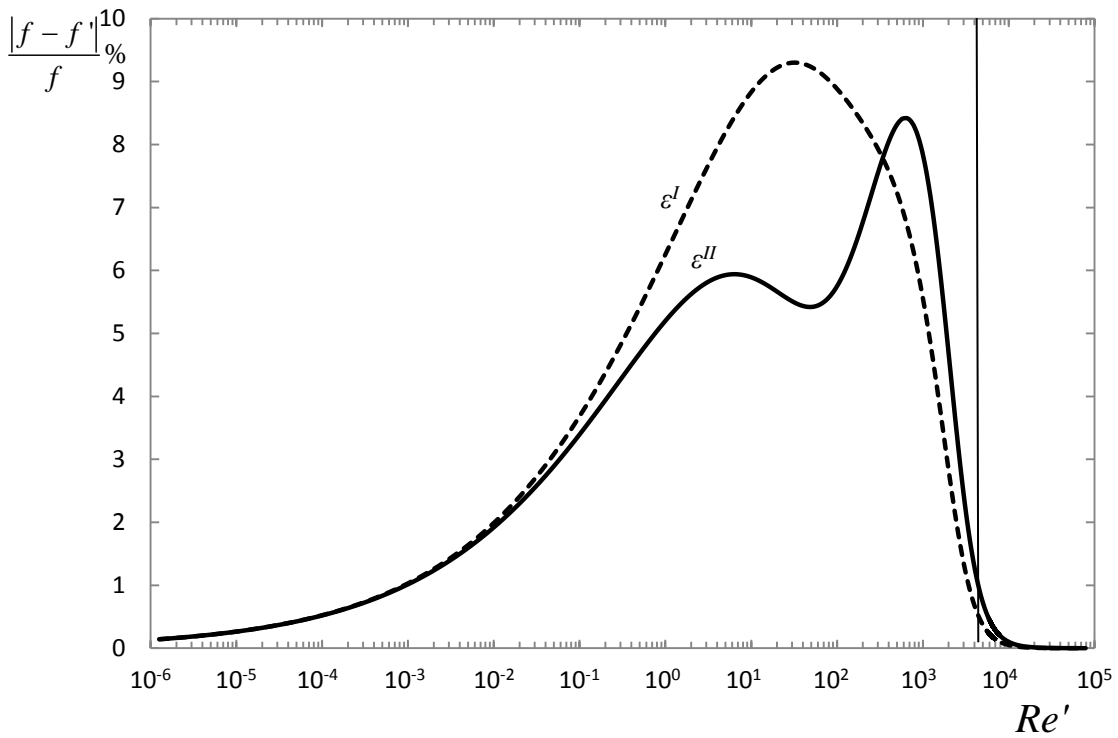


Figura 3-8 - Variação dos erros ε^I e ε^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re'^{II} , para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$. Linhas: - - - ε^I ; — ε^{II} .

3.2.3 Modelo de Casson

No modelo de Casson, para o cálculo da viscosidade e do índice de potência aparente foram utilizadas as expressões (3.10) e (3.11), respectivamente.

$$\begin{cases} \sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}} & \text{para } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$$n' = \frac{\sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}}}{\sqrt{\tau_0} + \sqrt{\mu_\infty \dot{\gamma}}} \quad (3.11)$$

À semelhança do que sucedia com o fluido Herschel-Bulkley, a expressão (2.34) permite obter de forma explícita a velocidade média na conduta, conhecido o fluido e a tensão de corte na parede.

$$a = \frac{\tau_0}{\mu_\infty \bar{U}/H} = -\frac{30c}{c^3 - 15c + 24\sqrt{c} - 10} \quad (2.34)$$

As propriedades reológicas, no caso do modelo de Casson, utilizadas para os cálculos estão presentes na Tabela 3-3.

Tabela 3-3 - Propriedades reológicas do fluido de Casson utilizado.

Casson	$\mu_\infty [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\tau_0 [\text{Pa}]$	$H [\text{m}]$
	0,55	0,062502	0,2

Após se efectuar todos os cálculos necessários, encontrou-se um erro máximo de 3,44% para f'' e 2,22% para f''' . A variação dos coeficientes de atrito, f''' e f , foi então representada graficamente em de função de Re''' na Figura 3-9. A variação dos erros de f'' e de f''' também foi representada graficamente, na Figura 3-10, ao longo de Re''' .

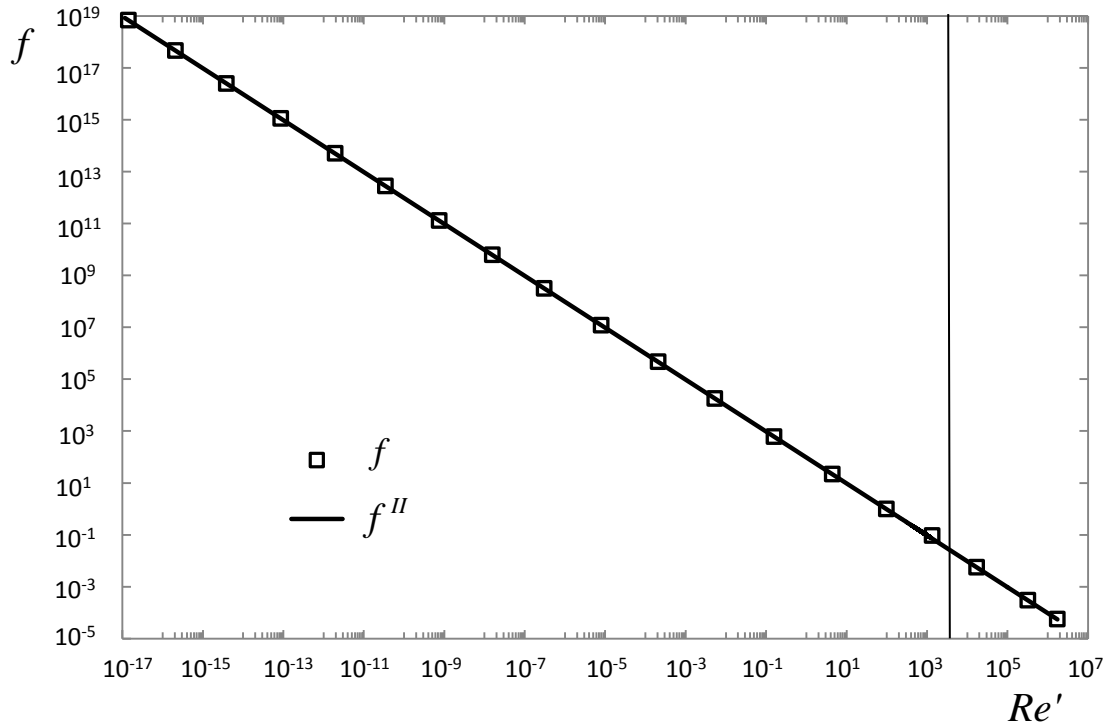


Figura 3-9 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Casson. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f^{II} ; □ coeficiente de atrito exato, f .

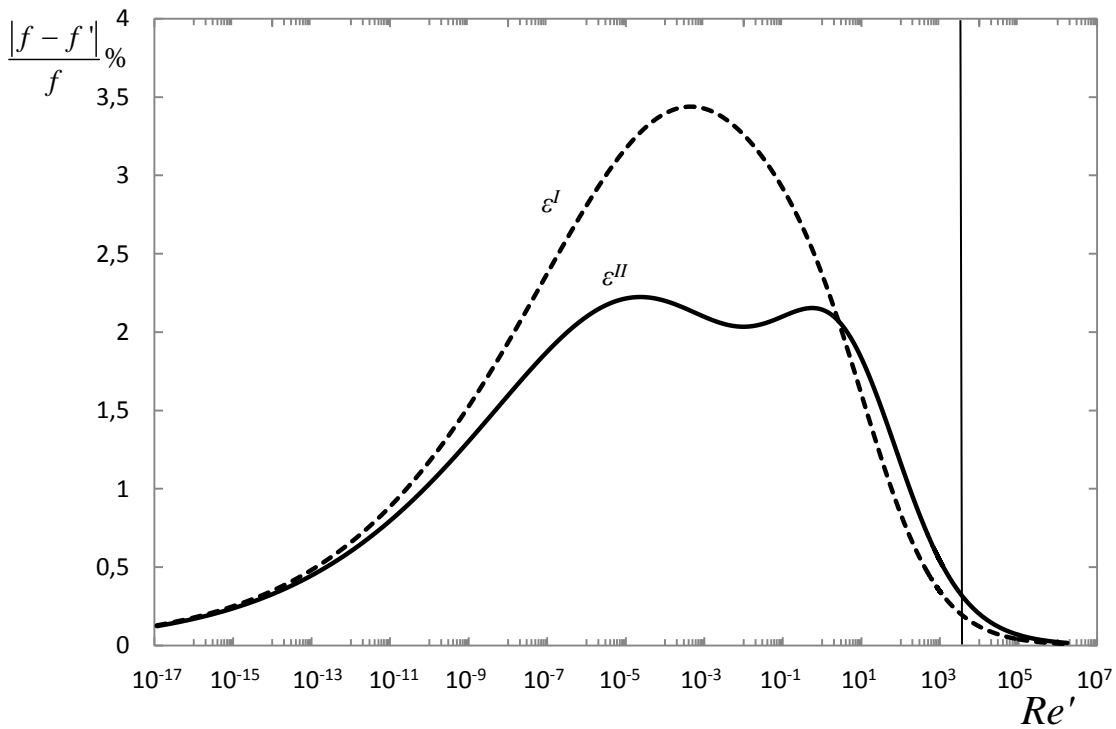


Figura 3-10 - Variação dos erros ϵ^I e ϵ^{II} , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re^{II} , para o fluido Casson. Linhas: ----- ϵ^I ; — ϵ^{II} .

3.2.4 Modelo Carreau-Yasuda

No modelo Carreau-Yasuda, para o cálculo da viscosidade foi utilizado a expressão (3.12) e para o índice de potência aparente a expressão (3.13).

$$\mu = \mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{(n-1)}{a}} \quad (3.12)$$

$$n' = 1 + \frac{(\mu_0 - \mu_{\infty})(n-1) \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{(n-1-a)}{a}} (\Lambda \dot{\gamma})^a}{\mu_{\infty} + (\mu_0 - \mu_{\infty}) \left[1 + (\Lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{(n-1)}{a}}} \quad (3.13)$$

Ao contrário do que acontecia para os fluidos anteriores, para o modelo Carreau-Yasuda a velocidade média foi obtida numericamente tendo sido arbitrado o valor da taxa de deformação na parede, Silva (2012). Deste modo a integração foi efectuada utilizando 3000, 6000, 12000 e 24000 pontos ao longo da direcção perpendicular à parede medida a partir do plano de simetria da conduta, os quais deram origem aos valores de coeficiente de atrito de f_I , f_{II} , f_{III} e f_{IV} , respectivamente. O valor utilizado para coeficiente de atrito de referência, exato, será o obtido com 24000 pontos, f_{IV} , dado que apresenta um menor erro quando comparado com os restantes, Anexo A.

Para o modelo Carreau-Yasuda foram utilizados dois fluidos e as suas propriedades reológicas estão presentes na Tabela 3-4.

Tabela 3-4 - Propriedades reológicas dos dois fluidos Carreau-Yasuda utilizados.

Carreau-Yasuda	$\mu_{\infty} [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\mu_0 [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\Lambda [\text{s}]$	$a [-]$	$n [-]$	$H [\text{m}]$
	0,08	1	10	1,5	0,2	0,2
	0,000108			2	0,358	

Para o fluido Carreau-Yasuda com $n = 0,2$, $a = 1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0 = 0,08$, o erro máximo encontrado para f'' foi de 2,43% e para f''' foi de 2,79%. As figuras 3-11 e 3-12 representam respetivamente a variação dos coeficientes de atrito, f'' e f , e dos erros encontrados para f'' e f''' em função de Re''' para este fluido.

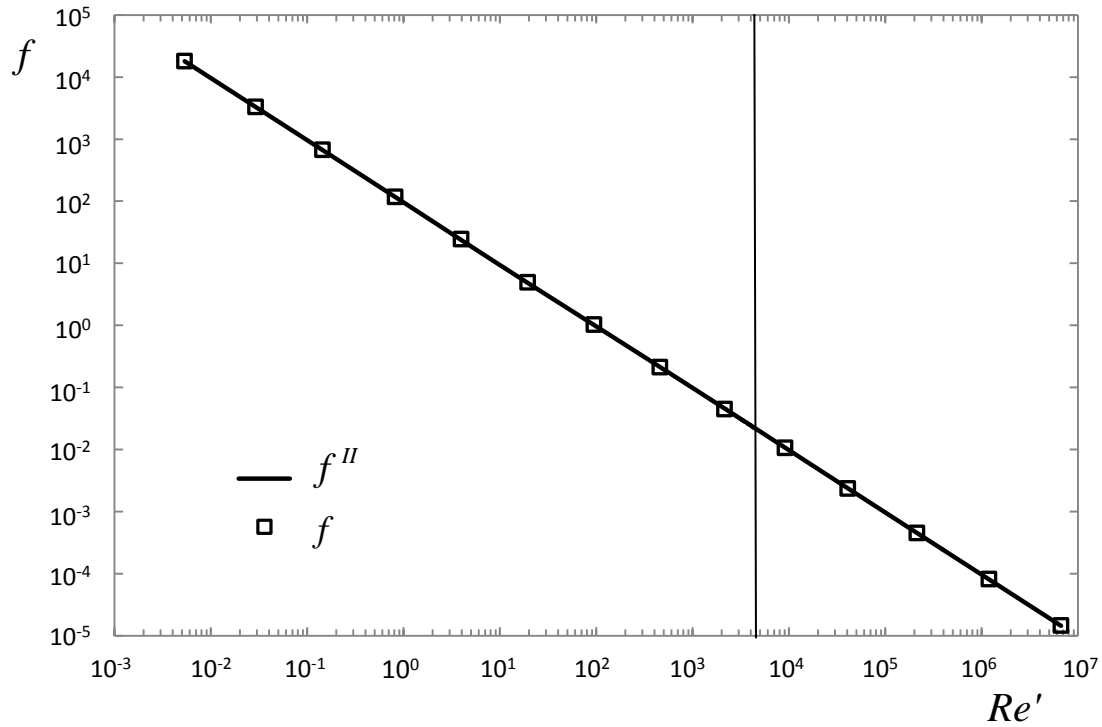


Figura 3-11 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re'' , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f'' ; \square coeficiente de atrito exato, f .

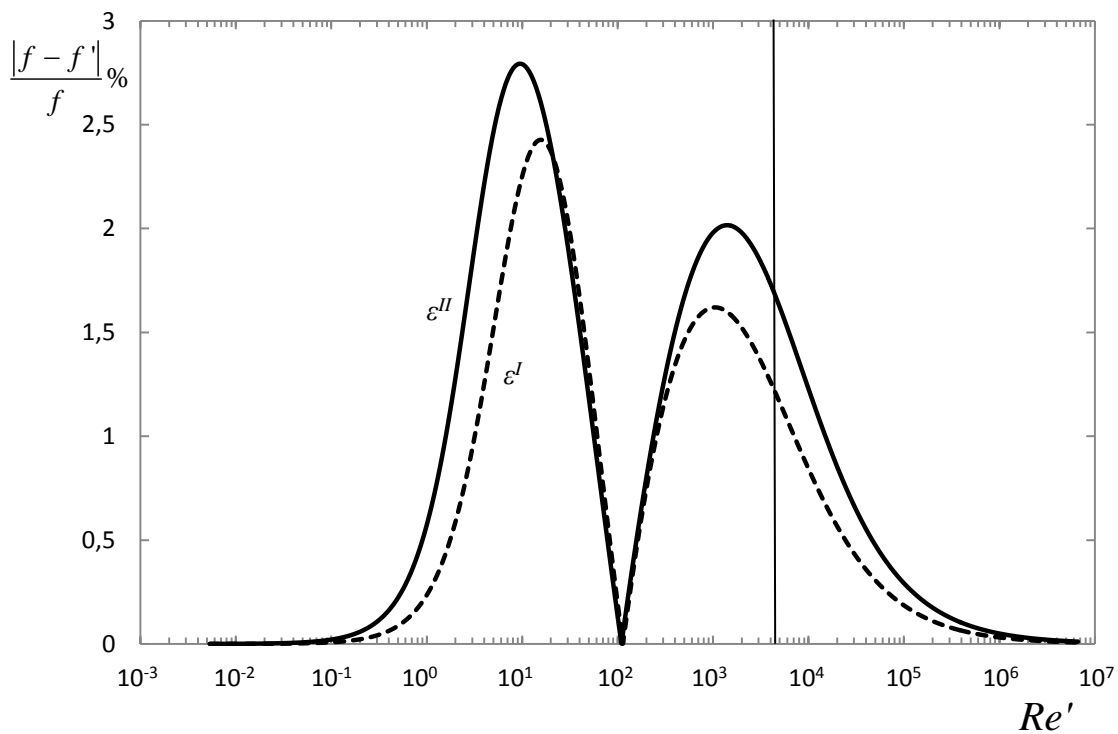


Figura 3-12 - Variação dos erros ϵ' e ϵ'' , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re'' , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$. Linhas: ----- ϵ' ; — ϵ'' .

Para o fluido com $n = 0,358$, $a = 2$, $\mu_{\infty}/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$, o erro máximo encontrado para f'' foi de 3,03% e para f''' foi de 3,40%. As figuras 3-13 e 3-14 apresentam, respectivamente, a variação dos coeficientes de atrito, f'' e f e dos erros encontrados para f'' e f''' em função de Re''' .

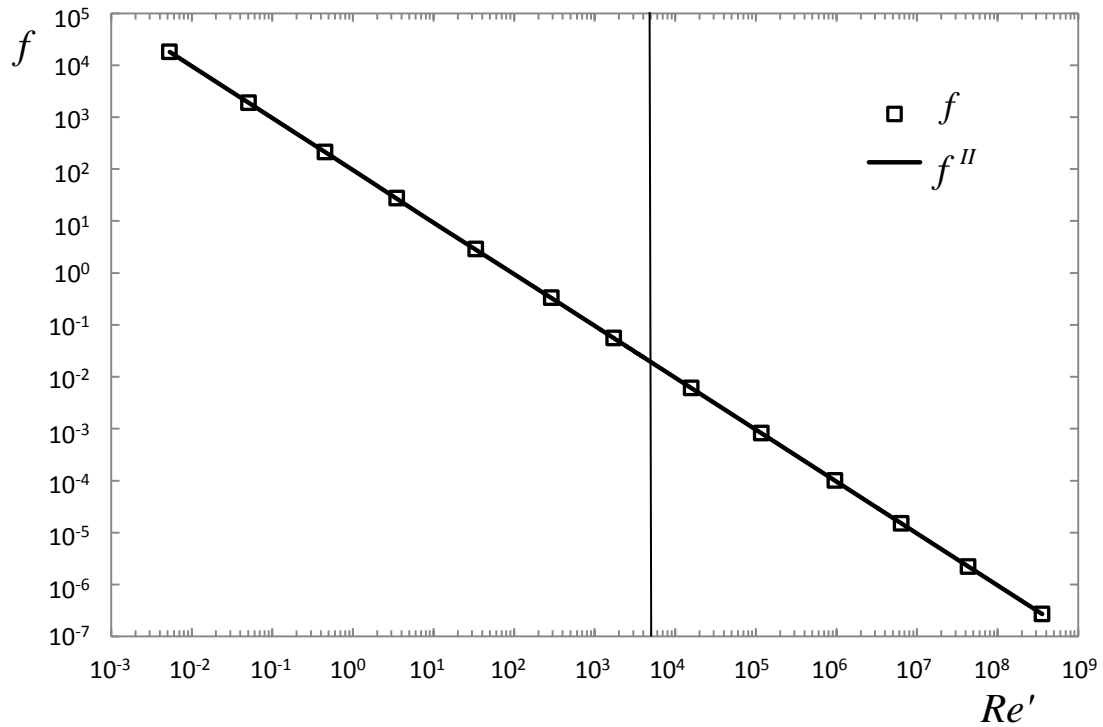


Figura 3-13 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, Re''' , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$. Legenda: — coeficiente de atrito simplificado, f'' ; \square coeficiente de atrito exato, f .

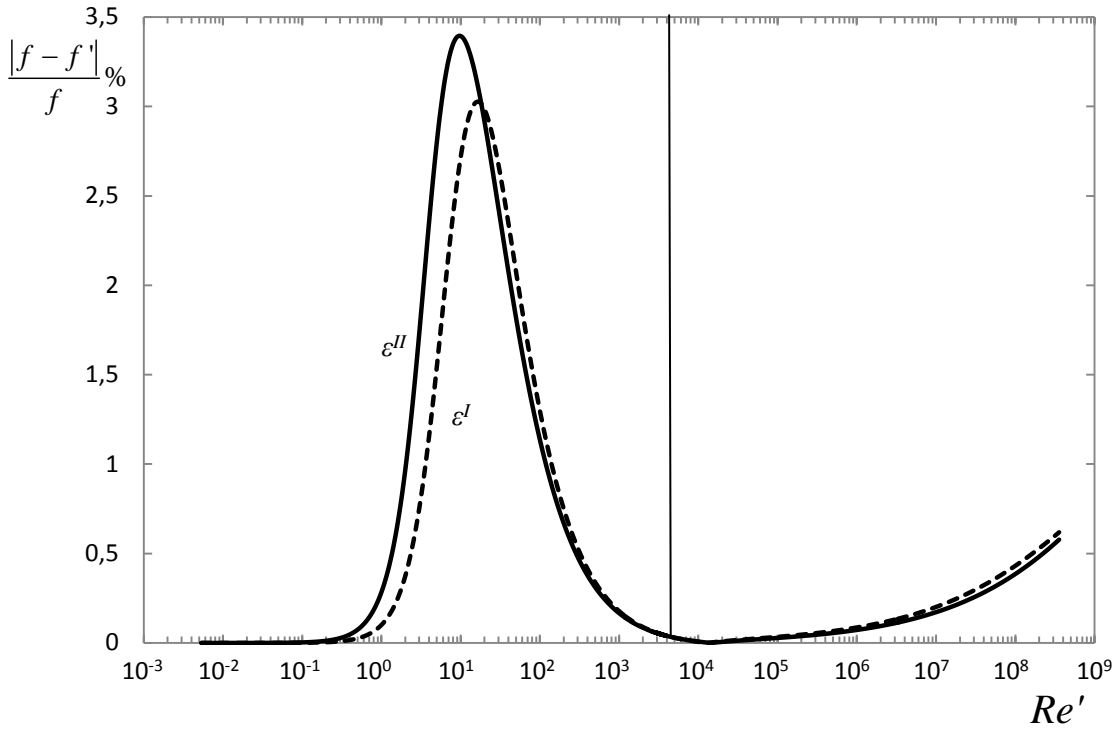


Figura 3-14 - Variação dos erros ε' e ε'' , Eq. (1.13) em função do Reynolds generalizado, Re'' , para o fluido Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$. Linhas: ----- ε' ; — ε'' .

3.3 Resumo

Nesta secção será feito um resumo dos resultados patentes neste capítulo e uma avaliação do coeficiente de atrito obtido por aplicação do método simplificado. Os erros máximos obtidos para todos os fluidos analisados, estão patentes na Tabela 3-5 e a variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado, para todos os fluidos estudados estão patentes na Figura 3-15.

Tabela 3-5 - Resumo dos erros máximos encontrados para o coeficiente de atrito de todos os fluidos estudados.

Fluidos		Erro f'' [%]	Erro f''' [%]
sPTT	-	2,06	0,97
Bingham e Herschel- Bulkley	$n = 0,5$ $n = 1$ $n = 1,5$	3,20 6,42 9,30	2,13 4,34 8,42
Casson	-	3,44	2,22
Carreau- Yasuda	$n = 0,2$ $a = 1,5$ $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} = 0,08$ $n = 0,358$ $a = 2$ $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} = 1,08 \times 10^{-4}$	2,43 3,03	2,79 3,40

Como se pode constatar, após a análise da Tabela 3-5, para todos os fluidos, à exceção do Carreau-Yasuda, o erro máximo encontrado através de f''' foi inferior ao encontrado através de f'' . Desta forma, pode-se concluir que a segunda abordagem conduz, regra geral, a um resultado mais correto por comparação com o resultado exato. Os erros obtidos por qualquer das duas abordagens são também perfeitamente aceitáveis em cálculos de engenharia. O bom desempenho do método simplificado no cálculo de coeficiente de atrito, pode também ser constatado na Figura 3-15, onde a coincidência entre os valores exatos e os valores aproximados é mais uma vez notória.

Este método é sobretudo útil em casos como o fluido Carreau-Yasuda, cujo modelo reológico facilmente se ajusta à curva de viscosidade de corte de qualquer fluido não-Newtoniano, e onde uma solução analítica através da qual se possa calcular o f exato é impossível de obter.

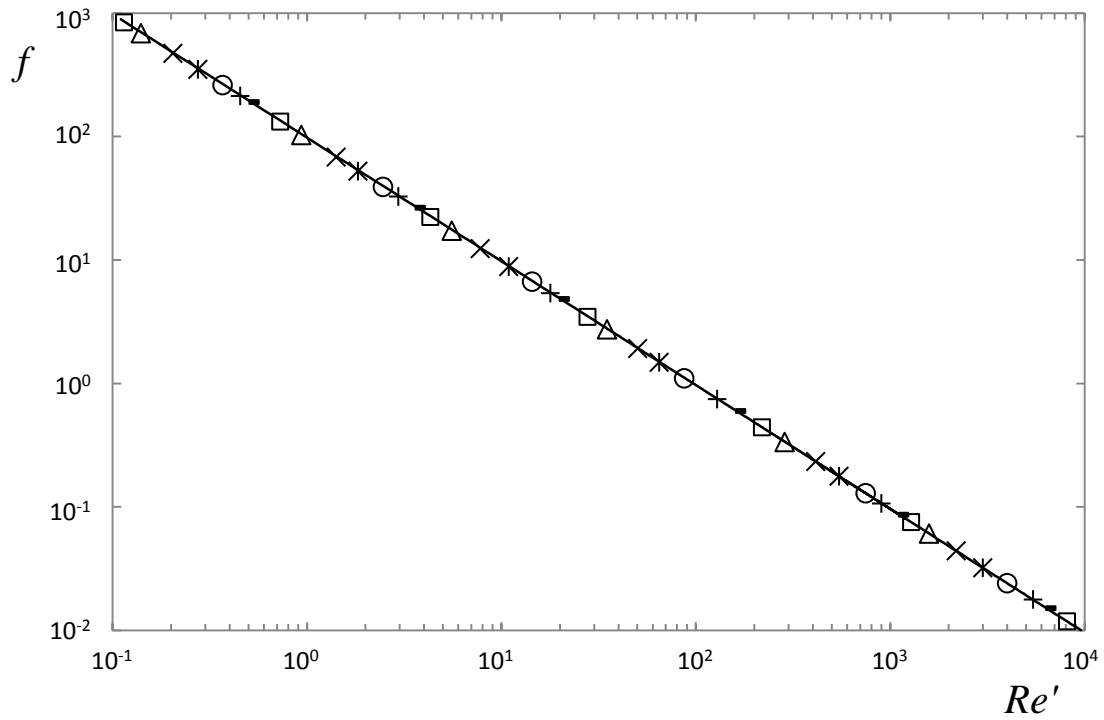


Figura 3-15 - Variação do coeficiente de atrito em função do número de Reynolds generalizado. Linha —, coeficiente de atrito simplificado, símbolos (valores exatos): ·, Fluido sPTT; □, Fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$; △, Fluido Bingham; ×, Fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$; *, Fluido Casson; ○, Fluido Carreau-Yasuda, $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0 = 0,08$; +, Fluido Carreau-Yasuda, $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$.

4 Número de Nusselt obtido pelo método simplificado para fluxo de calor constante na parede

Neste capítulo, será feita uma avaliação de desempenho da expressão do número de Nusselt obtida pelo método simplificado, Nu' , por comparação com a expressão do número de Nusselt exata, Nu , obtida numericamente, mencionando-se o erro máximo encontrado, para o caso de fluxo de calor constante na parede. Para cada um dos fluidos estudados serão traçados dois gráficos, um comparando Nu' com Nu e outro representando o erro entre os dois, equação (1.14), $|Nu - Nu'|/Nu\%$, em função do número adimensional relevante de cada modelo reológico, Tabela 2-1. À semelhança do que foi feito no capítulo anterior, no final deste capítulo será elaborado um resumo com a apresentação de uma tabela resumindo os erros obtidos, para os vários fluidos.

4.1 Número de Nusselt aproximado, Nu'

Para o cálculo do número de Nusselt pelo método simplificado, Nu' , será necessário, para todos os fluido em estudo, conhecer a velocidade média, \bar{U} , diâmetro hidráulico, D_H , bem como as restantes características do fluido, Tabela 1-5. Assim, será possível o cálculo da taxa de deformação característica, $\dot{\gamma} = 12\bar{U}/D_H$, que posteriormente será utilizado para o cálculo do índice de potência aparente, n' , parâmetro cujas equações de cálculo foram apresentadas na Tabela 1-1 e de que Nu' , depende de forma explícita através da seguinte expressão.

$$Nu' = \frac{12(4n' + 1)(5n' + 2)}{32n'^2 + 17n' + 2} \quad (4.1)$$

cuja dedução, feita por Silva (2012), está patente no anexo B.

Uma vez que a abordagem utilizando a taxa de deformação característica $\dot{\gamma} = 12\bar{U}/D_H$, resulta no global em melhores resultados para o cálculo do coeficiente de atrito, conforme se viu no capítulo anterior, também será com esta taxa de deformação que se irá calcular o índice de potência aparente, n' , através do qual se irá calcular o número de Nusselt Nu' .

4.2 Número de Nusselt exato, Nu

Ao longo deste trabalho para efeitos de quantificação do erro encontrado no cálculo do Nusselt pelo método simplificado será necessário definir o número de Nusselt exacto, Nu , valores estes utilizados como referência. Para todos os fluidos testados, este será calculado por integração numérica da equação da energia sendo que a metodologia para o devido cálculo foi descrita por Silva (2012), Anexo C do referido trabalho. Desta forma, a integração foi efetuada utilizando 3000, 6000, 12000 e 24000 pontos ao longo da direção perpendicular à parede medida a partir do plano de simetria da conduta, os quais deram origem aos valores de números de Nusselt de Nu_I , Nu_{II} , Nu_{III} , Nu_{IV} , respetivamente. O valor de Nu utilizado será o obtido com 24000 pontos, Nu_{IV} , dado que apresenta um menor erro quando comparado com os restantes, tal como era esperado.

Os erros inerentes aos valores obtidos por integração numérica para os diversos fluidos testados estão apresentados no Anexo C. Pode-se verificar que o erro máximo encontrado, $Nu_{IV}-Nu_{III}$, ocorreu para o fluido Carreau-Yasuda e foi de $5,46 \times 10^{-5}$. Este facto já era esperado pois para este fluido o perfil de velocidades também foi calculado numericamente o que representa uma fonte de erro adicional. Nos restantes fluidos analisados o erro máximo, $Nu_{IV}-Nu_{III}$, nunca ultrapassou o valor de $1,64 \times 10^{-5}$. Dada a sua elevada exatidão, como se pode constatar do referido anexo, os valores numéricos foram preferidos às soluções analíticas, para os casos em que estas existiam, em virtude do trabalho inerente às pesquisas bibliográficas necessárias realizar para o efeito não contribuir para uma alteração apreciável dos resultados obtidos pela via numérica.

4.3 Resultados

Nesta secção serão apresentados os resultados obtidos através da aplicação do método simplificado para determinação número de Nusselt. Ir-se-á pois representar graficamente tanto Nu' como o número de Nusselt exato, Nu , em função do grupo adimensional relevante associado a cada fluido. De referir que o número de Nusselt exato foi obtido numericamente como foi indicado na secção anterior. O erro dado pela equação (1.14), $|Nu - Nu'|/Nu \%$, também será representado graficamente em função do grupo adimensional relevante, para uma melhor perceção da região onde se dá o erro

máximo. É necessário referir também que o referido erro foi avaliado em cerca de 1500 pontos para a maioria dos fluidos, exceto para os fluidos de Carreau-Yasuda, que no primeiro caso foi para cerca de 1600 e para o segundo para cerca de 2900.

4.3.1 Modelo sPTT

Para o cálculo do número de Nusselt pelo método simplificado para fluxo de calor constante na parede, Nu' , será utilizado a expressão (4.1). Assim, em primeiro lugar, será necessário conhecer a velocidade média, \bar{U} , a taxa de deformação característica, $\dot{\gamma} = 12\bar{U}/D_H$ e índice de potência aparente, n' . De referir que os valores utilizados para \bar{U} são iguais aos utilizados no caso do cálculo do número de Reynolds generalizado, capítulo 3, pois o método de cálculo é o mesmo. Isso acontece tanto para o fluido sPTT como para todos os restantes fluidos estudados ao longo deste trabalho. Em relação à taxa de deformação característica, e como referido anteriormente, ao contrário do que acontecia com o capítulo anterior, somente se utilizará a expressão relativa a placas paralelas, expressão (2.2).

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_{w, \text{Newtoniano}} = \frac{\tau_w}{\mu} = \frac{6\bar{U}}{2H} = \frac{12\bar{U}}{D_H} \quad (2.2)$$

Foi ainda necessário arbitrar as características do fluido sPTT, como mostra a Tabela 3-1, aqui transcrita para maior comodidade, embora os resultados finais adimensionais sejam genéricos e portanto válidos para qualquer fluido sPTT sucedendo o mesmo para os restantes fluidos analisados com exceção do Carreau-Yasuda cuja generalidade é mais restrita.

Tabela 3-1 - Propriedades reológicas do fluido sPTT utilizado.

sPTT	$\eta [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\varepsilon [-]$	$\lambda [\text{s}]$	$H [\text{m}]$
	0,55	1,1	10	0,2

Após os devidos cálculos para cerca de 1500 valores de \bar{U} foi possível traçar o gráfico de variação do número de Nusselt, Nu' , para fluxo de calor constante na parede em função do grupo adimensional. Neste caso, o grupo adimensional utilizado para o fluido sPTT foi o $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$. Para o cálculo do erro foi necessário a determinação do

número de Nusselt exato, $Nu \equiv Nu_{IV}$, como foi mencionado na secção anterior. A expressão utilizada para o efeito foi a seguinte,

$$\varepsilon_{Nu'} = \frac{|Nu - Nu'|}{Nu} \times 100\% \quad (1.14)$$

Para termos de comparação só será mencionado o erro máximo, pois é o que faz mais sentido neste trabalho. O erro máximo registado entre o número de Nusselt simplificado e o Nusselt exato foi de 2,69%. A Figura 4-1 mostra a evolução dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$.

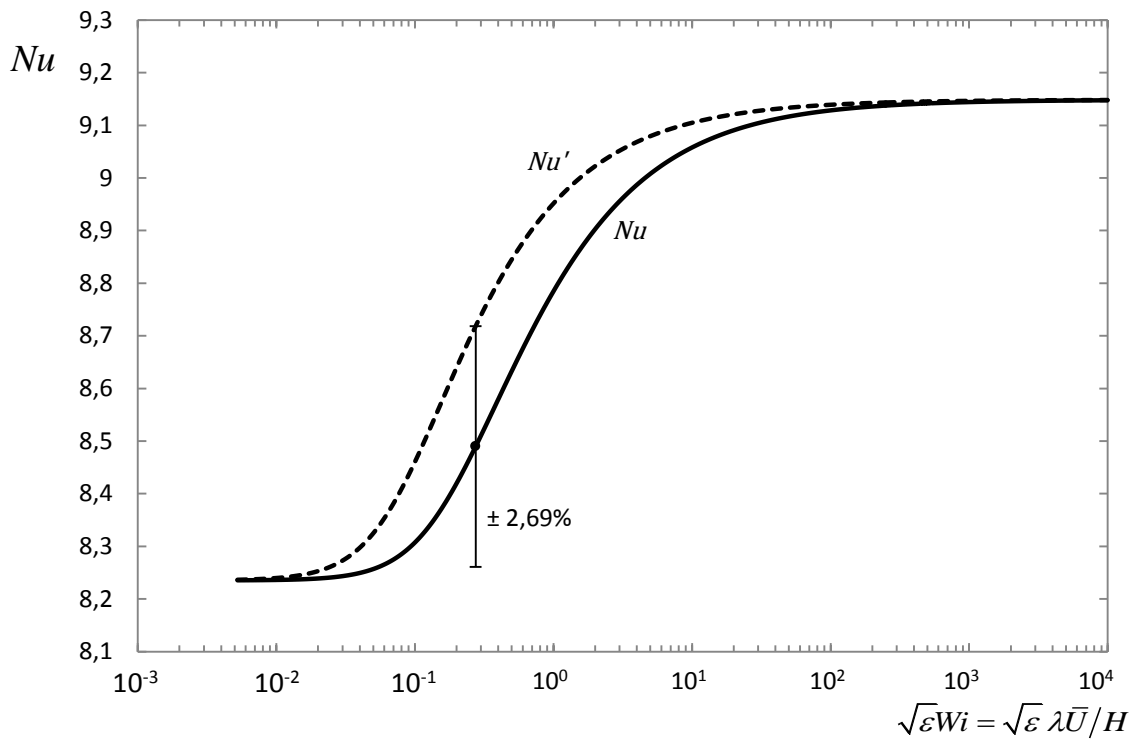


Figura 4-1 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$ para o fluido sPTT. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

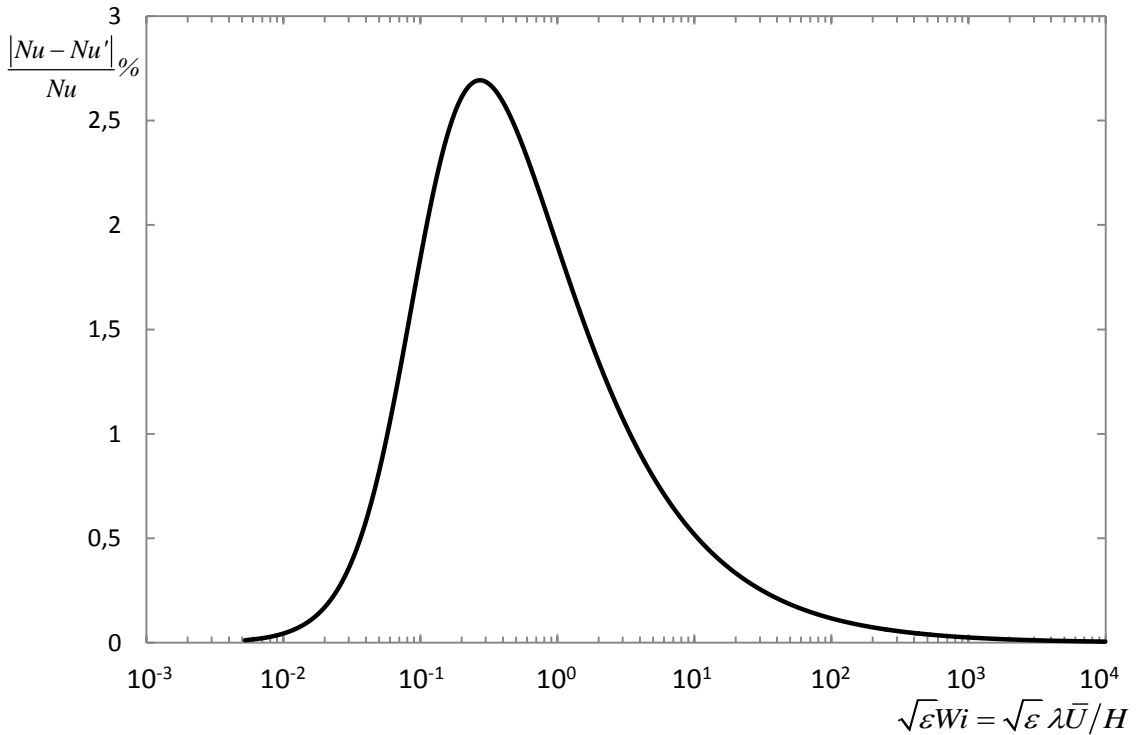


Figura 4-2 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido sPTT em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$.

Para finalizar a análise do número de Nusselt para fluxo de calor constante na parede para o fluido sPTT, apresenta-se na Figura 4-2, a variação do erro com o valor de $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$, ficando-se assim com uma melhor percepção da região onde se dá o erro máximo para este fluido.

4.3.2 Modelo Herschel-Bulkey

No caso do modelo Herschel-Bulkley utilizaram-se 3 fluidos, como mostra a seguinte tabela, aqui transcrita para maior comodidade. De notar que quando $n = 1$ está-se na presença do fluido de Bingham.

Tabela 3-2 - Propriedades reológicas dos três fluidos Herschel-Bulkley utilizados.

Bingham e Herschel- Bulkley	$\mu_{\infty} \equiv K [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\tau_0 [\text{Pa}]$	$n [-]$	$H [\text{m}]$
	0,05	0,07	0,5 1 1,5	0,2

Após os devidos cálculos foi possível traçar os gráficos para os diversos fluidos tanto da variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , como do erro em função do grupo adimensional, $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$. As figuras 4-3 e 4-4 apresentam as evoluções de Nu' e Nu e do erro, respetivamente, em função do parâmetro $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o caso de $n=0,5$. Pode-se verificar que se obteve neste caso um erro máximo de 1,67%.

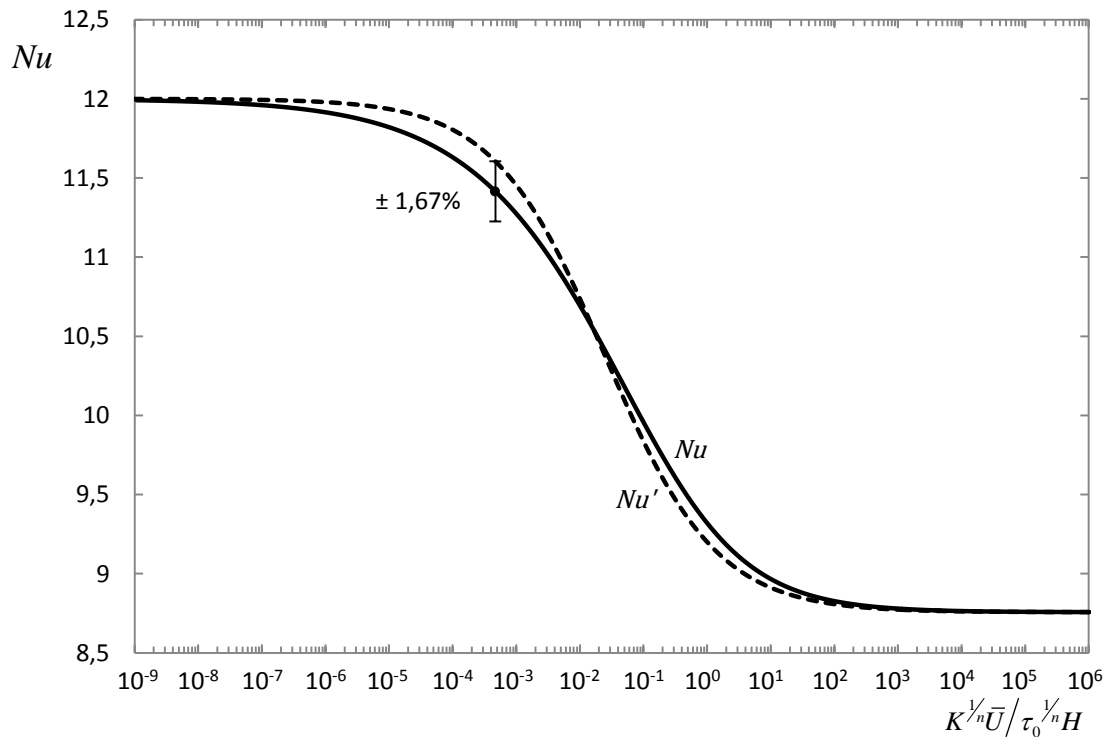


Figura 4-3 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para $n=0,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

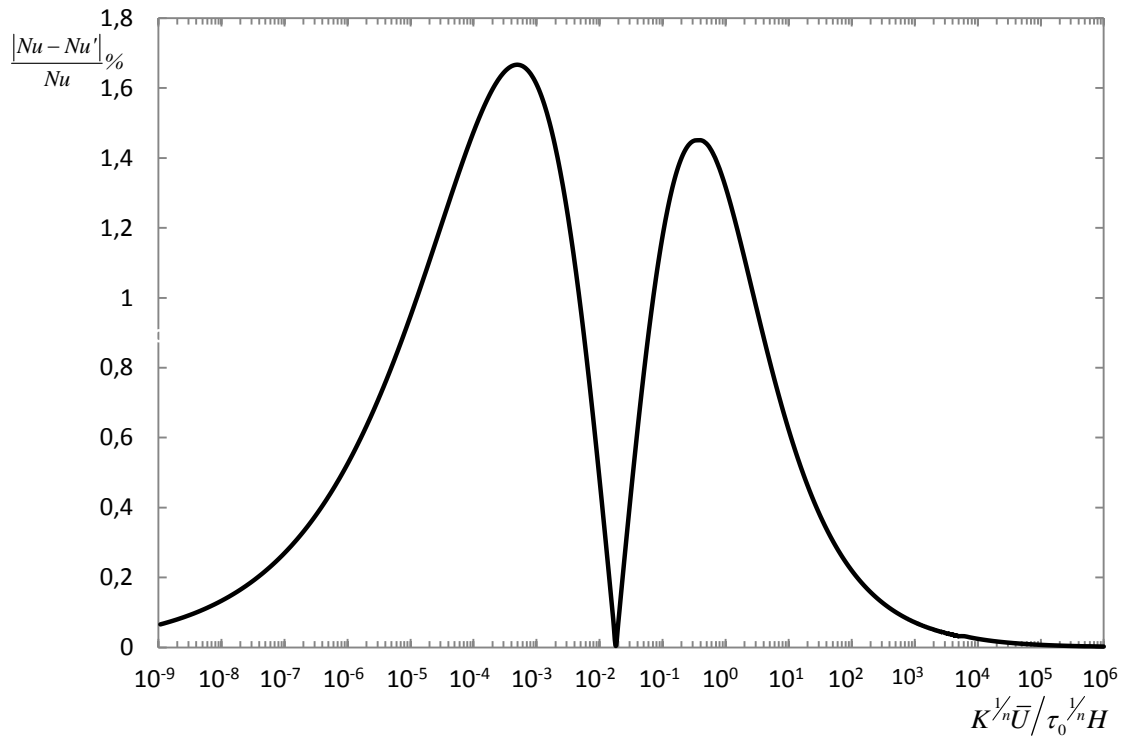


Figura 4-4 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=0,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

Para $n = 1$, fluido de Bingham, o erro máximo encontrado foi de 3,47%, como se pode verificado pelas figuras 4-5 e 4-6, onde apresentam as evoluções de Nu' e Nu e do erro entre ambos, respetivamente, em função do parâmetro $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

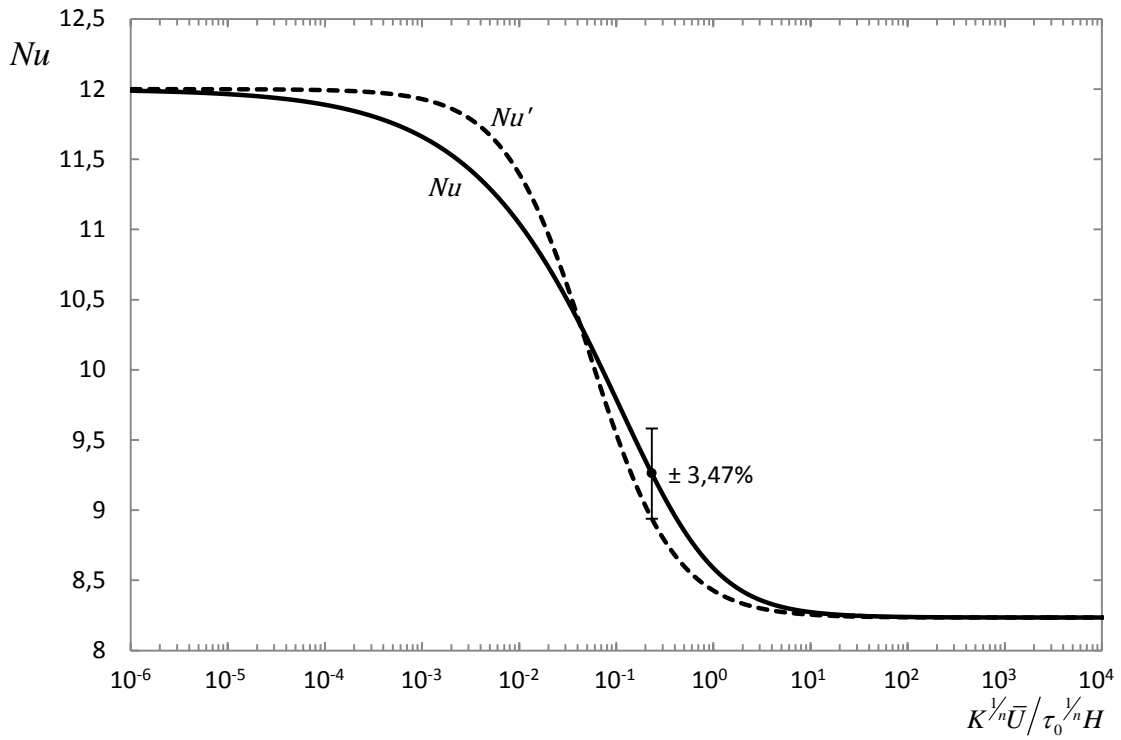


Figura 4-5 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para $n=1$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

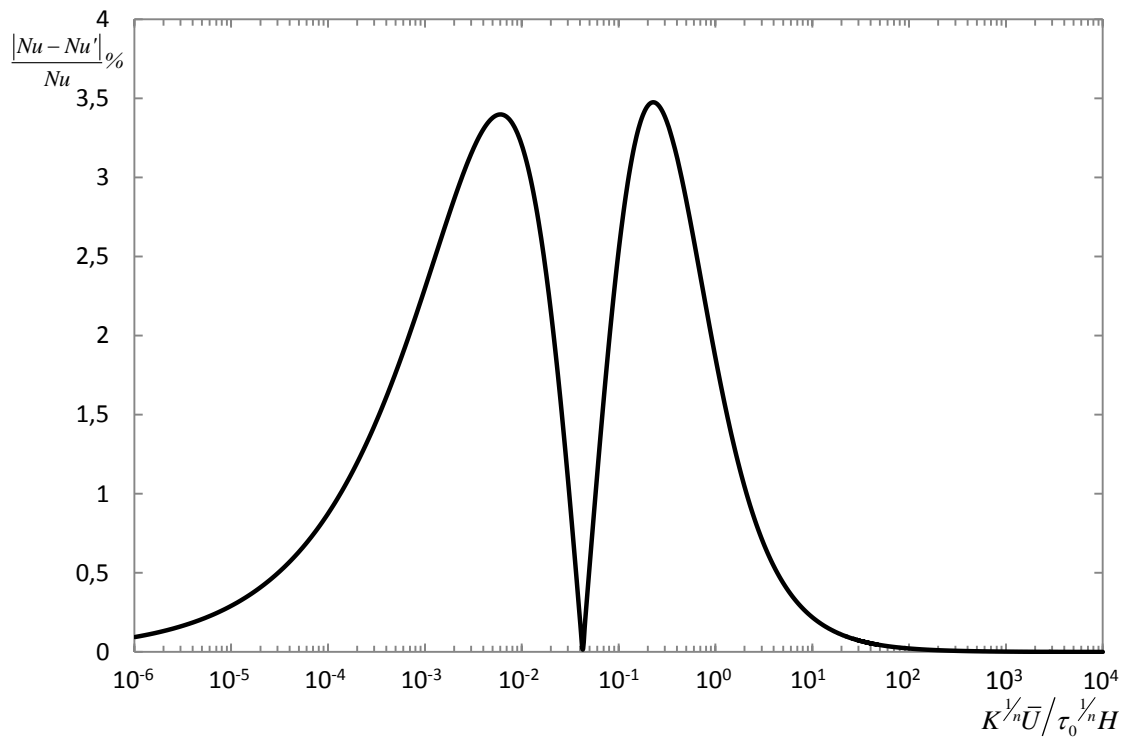


Figura 4-6 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

As figuras 4-7 e 4-8 apresentam a variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre ambos, respetivamente, em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o caso de $n = 1,5$. O erro máximo obtido para este fluido foi de 5,05%.

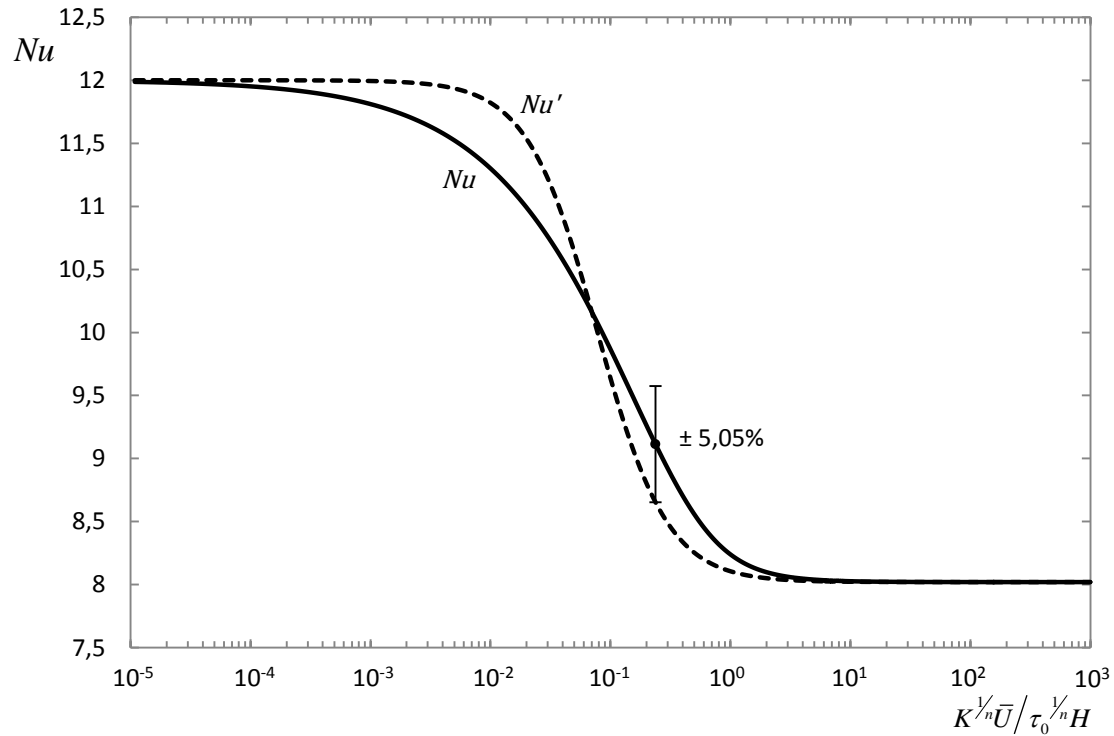


Figura 4-7 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para $n=1,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

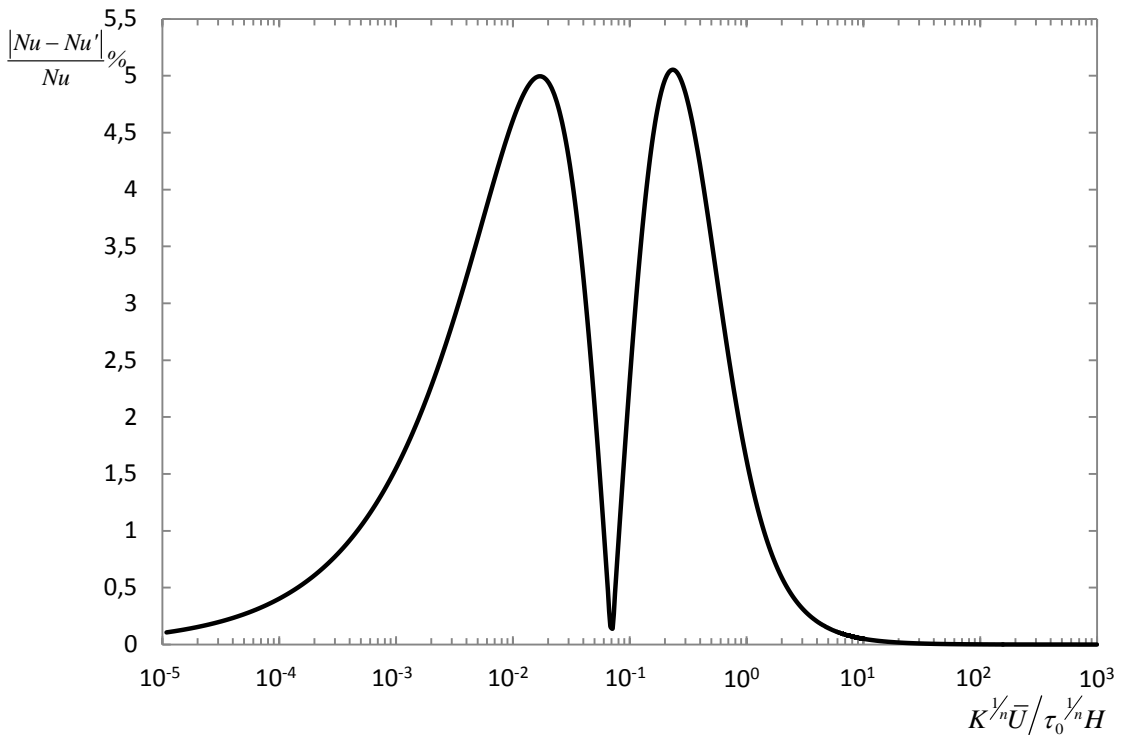


Figura 4-8 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

4.3.3 Modelo de Casson

Após os cálculos necessários foi possível traçar os gráficos do número de Nusselt e do erro em função do grupo adimensional $\mu_\infty \bar{U} / \tau_0 H$. Para isso foram utilizadas as propriedades características do fluido de Casson, presentes na Tabela 3-3, aqui transcrita para maior comodidade.

Tabela 3-3 - Propriedades reológicas do fluido Casson utilizado.

Casson	μ_∞ [Pa·s]	τ_0 [Pa]	H [m]
	0,55	0,062502	0,2

Desta forma, o erro máximo encontrado para o fluido de Casson foi de 1,95%. As figuras 4-9 e 4-10 apresentam a variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre os dois, respectivamente, em função de $\mu_\infty \bar{U} / \tau_0 H$.

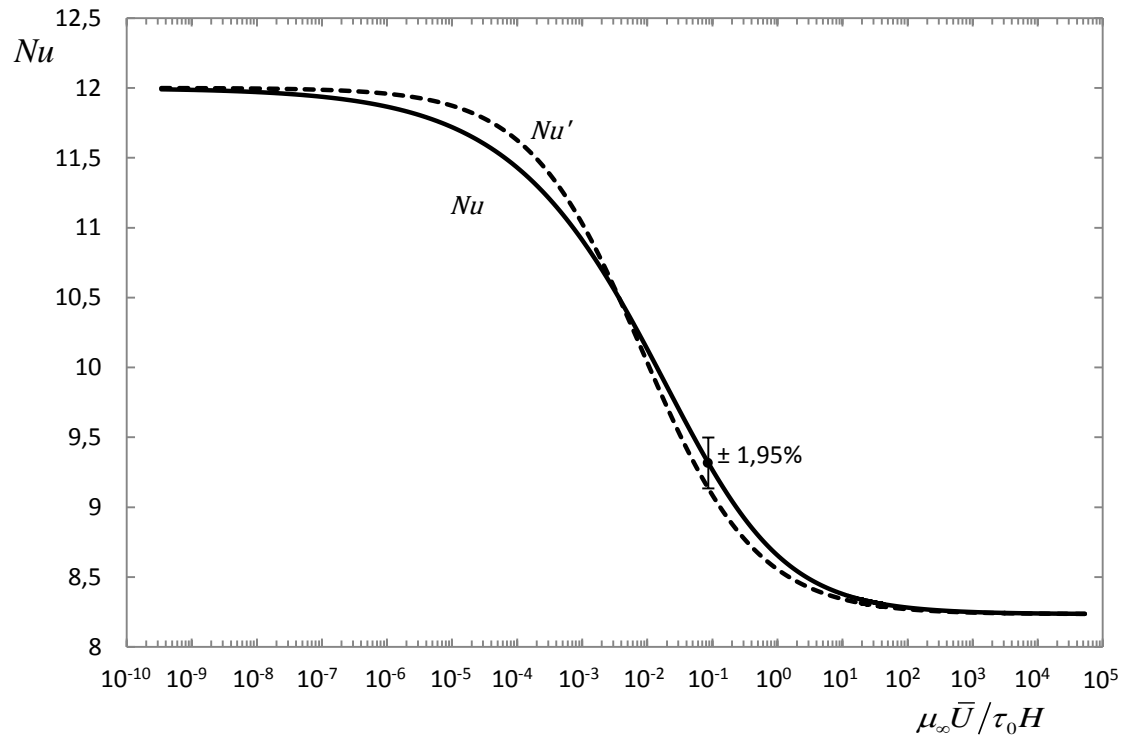


Figura 4-9 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$ para o fluido Casson. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

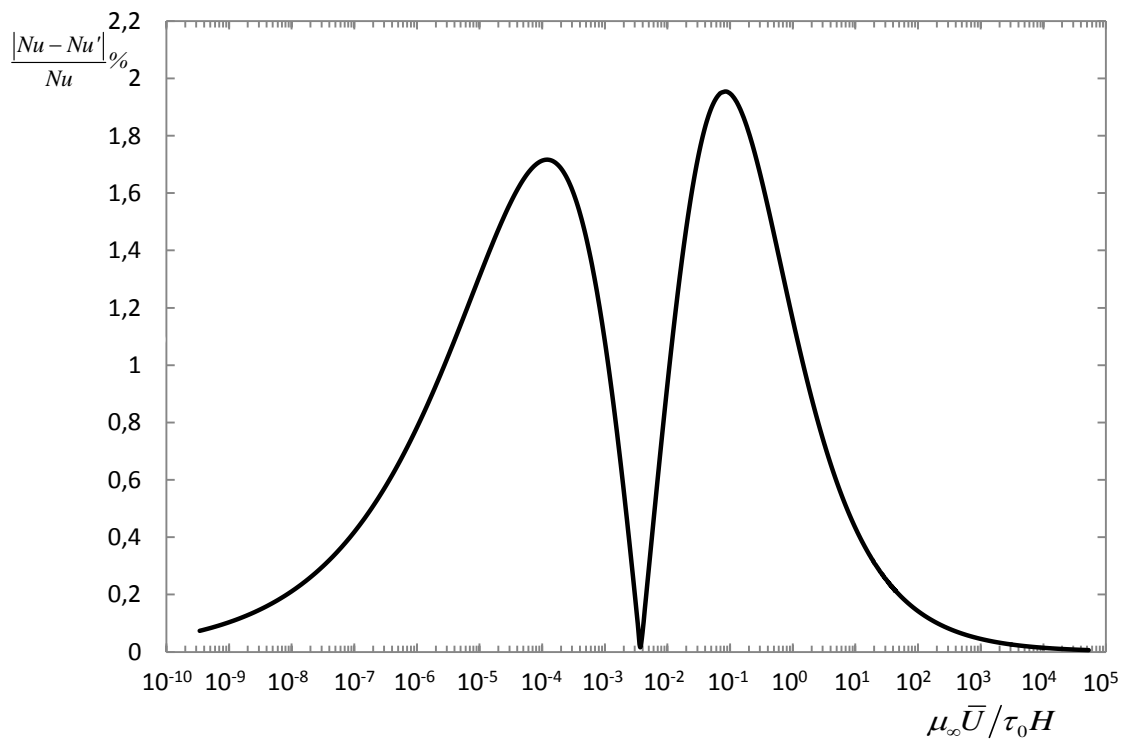


Figura 4-10 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido Casson em função do grupo adimensional $\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$.

4.3.4 Modelo Carreau-Yasuda

No caso do Carreau-Yasuda foram analisados dois fluidos, sendo que os seus parâmetros característicos são apresentados na tabela seguinte, aqui transcrita para maior comodidade.

Tabela 3-4 - Propriedades reológicas dos dois fluidos Carreau-Yasuda utilizados.

Carreau-Yasuda	μ_{∞} [Pa·s]	μ_0 [Pa·s]	Λ [s]	a [-]	n [-]	H [m]
Yasuda	0,08	1	10	1,5	0,2	0,2
	0,000108			2	0,358	

Após o traçado gráfico da variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do número adimensional, $\Lambda \bar{U}/H$, figuras 4-11 e 4-12, é possível verificar que o erro máximo encontrado foi de 1,93% para o fluido Carreau-Yasuda com $n = 0,2$, $a = 1,5$ e $\mu_{\infty}/\mu_0 = 0,08$.

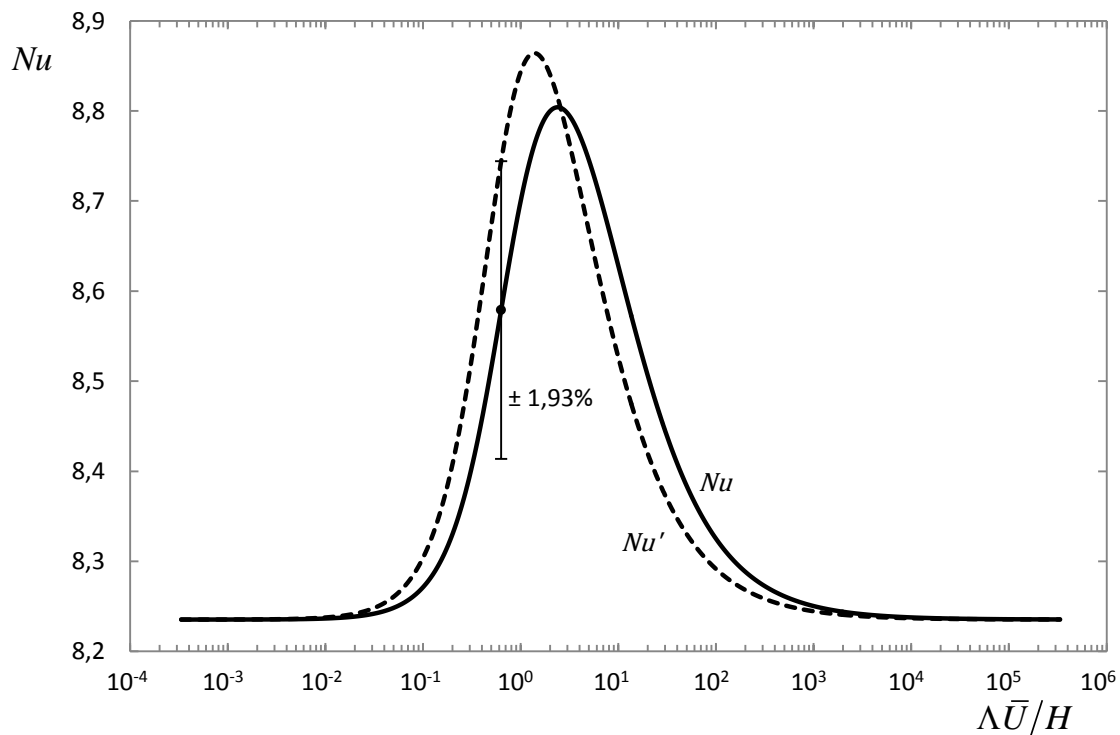


Figura 4-11 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

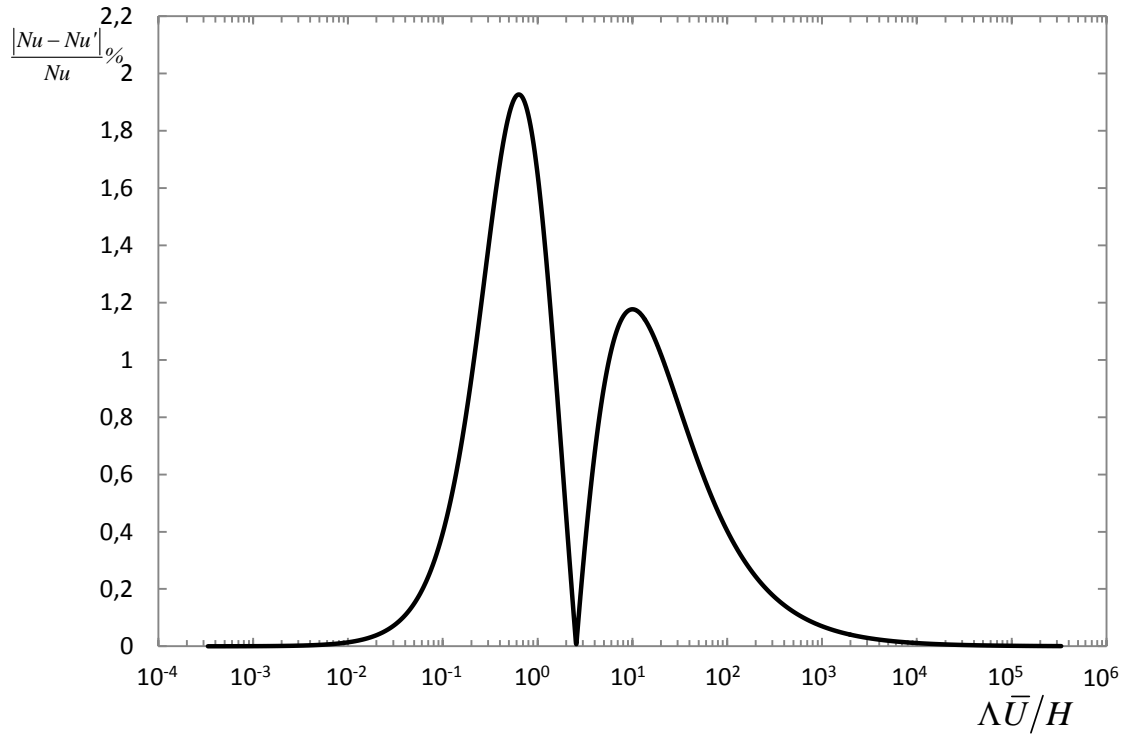


Figura 4-12 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$ em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/H$.

As figuras 4-13 e 4-14 apresentam a evolução dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre estes, respetivamente, em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda com $n = 0,358$, $a = 2$ e $\mu_\infty/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$. Neste caso o erro máximo encontrado foi de 2,43%.

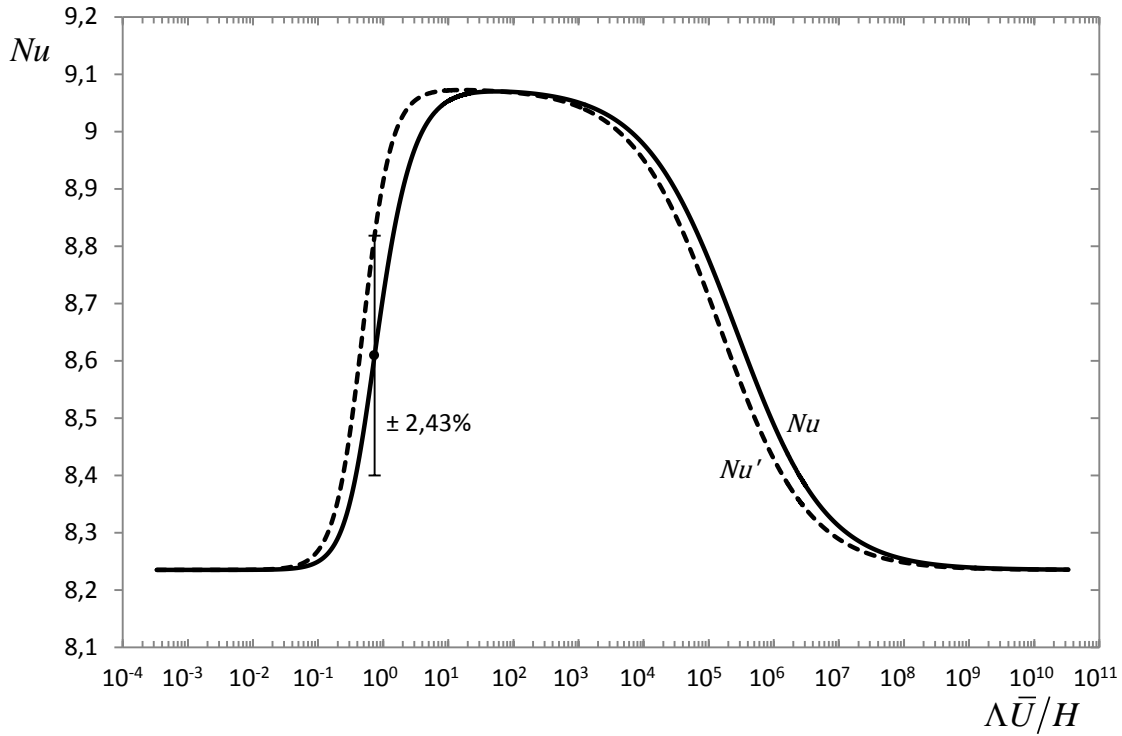


Figura 4-13 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

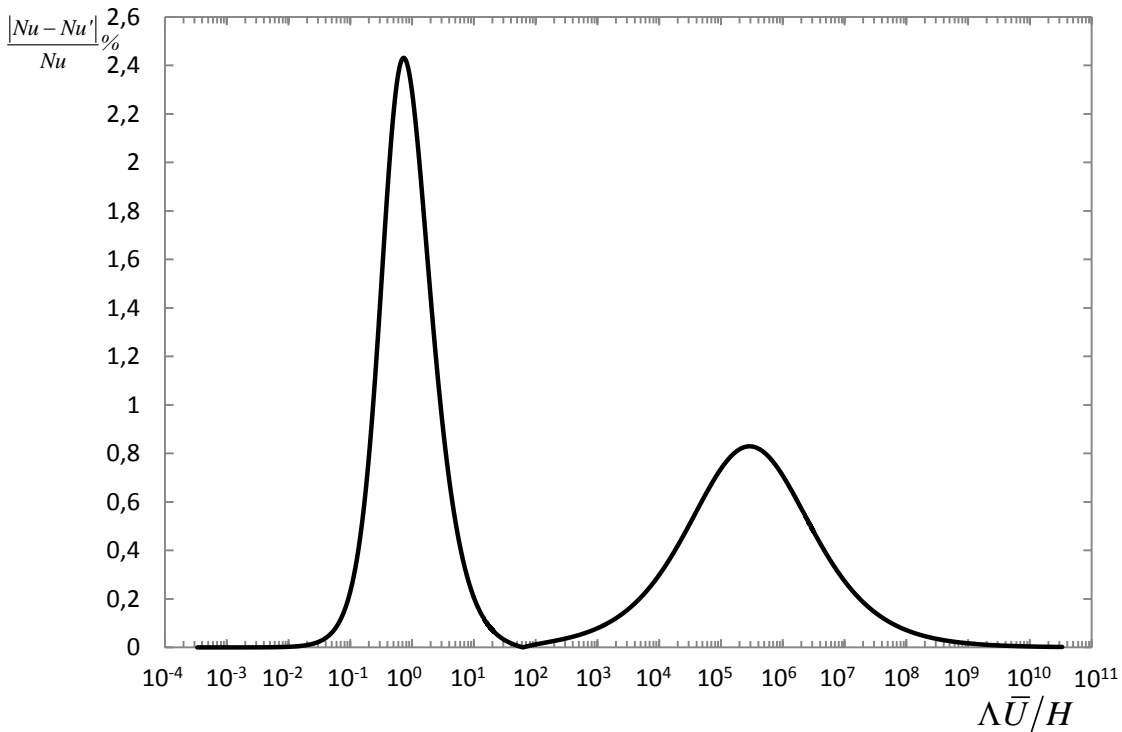


Figura 4-14 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$ em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$.

Como referido anteriormente para o caso do Carreau-Yasuda, foi necessário analisar uma maior quantidade de pontos para uma completa análise da variação do erro ao longo de $\Lambda \bar{U}/H$, sendo que para o fluido com $n = 0,2$, $a = 1,5$ e $\mu_{\infty}/\mu_0 = 0,08$ foram necessários cerca de 1600 e para o fluido com $n = 0,358$, $a = 2$ e $\mu_{\infty}/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$ cerca de 2900.

4.4 Resumo

Os erros máximos obtidos para cada um dos fluidos analisados estão presentes na Tabela 4-1, sendo que desta forma foi possível resumir os resultados patentes neste capítulo.

Tabela 4-1 - Resumo dos erros máximos encontrados para o número de Nusselt simplificado, Nu' , para fluxo de calor constante na parede de todos os fluidos estudados.

Fluidos		Erro Nu' [%]
sPTT	-	2,69
Bingham e Herschel- Bulkley	$n = 0,5$ $n = 1$ $n = 1,5$	1,67 3,47 5,05
Casson	-	1,95
Carreau- Yasuda	$n = 0,2$ $a = 1,5$ $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} = 0,08$ $n = 0,358$ $a = 2$ $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} = 1,08 \times 10^{-4}$	1,93 2,43

Como se pode averiguar pela Tabela 4-1, o fluido que apresentou o erro máximo maior foi o Herschel-Bulkley para $n = 1,5$, 5,05%.

Também neste caso se constata que os erros inerentes ao método simplificado são perfeitamente aceitáveis em aplicações de engenharia.

5 Número de Nusselt obtido pelo método simplificado para temperatura constante na parede

Neste capítulo ir-se-á estender o estudo do número de Nusselt obtido pela aplicação do método simplificado, iniciado no capítulo anterior, agora para o caso de temperatura constante na parede da conduta. Primeiramente, partindo da expressão deduzida por Silva (2012), de cálculo do número de Nusselt para fluidos lei de potência num escoamento entre placas paralelas, será possível, para todos os fluidos estudados ao longo deste trabalho, comparar o desempenho do número de Nusselt simplificado, Nu' , com a expressão para o número de Nusselt exato, Nu , obtido numericamente. Posteriormente, será mencionado o erro máximo encontrado entre os dois e, da mesma forma que no capítulo anterior, para cada um dos fluidos serão traçados dois gráficos, um comparando o número de Nusselt simplificado, Nu' , com o exato, Nu , e outro com o comportamento do erro encontrado entres estes, ambos os gráficos tendo em abcissas o grupo adimensional relevante de cada fluido, ver Tabela 2-1. Finalmente, da mesma forma que nos capítulos anteriores, será feito um resumo com a apresentação de uma tabela com os resultados obtidos do erro máximo, para os vários fluidos.

5.1 Expressão a utilizar no cálculo do número de Nusselt simplificado

Como foi mencionado no capítulo 1, Silva (2012) encontrou, para o caso do escoamento entre placas paralelas, uma expressão para o cálculo do número de Nusselt recorrendo à integração semi-analítica da equação da energia, expressão (1.16). Uma vez que esta expressão era muito extensa, Silva (2012) optou por ajustar os valores de Nusselt em função do índice de potência, obtidos numericamente, a uma expressão da forma da presente na expressão (1.17), ficando assim formalmente mais simples e curiosamente com um erro menor. Deste modo, para um escoamento entre placas paralelas, a expressão do número de Nusselt para temperatura constante na parede a utilizar é dada por,

$$Nu = \frac{9,8694(26,7773n^2 + 11,7895n + 1)}{38,0066n^2 + 12,7778n + 1} \quad (1.19)$$

É necessário referir que a expressão anterior é aplicada a fluidos lei de potência, pelo que para os restantes modelos estudados será necessário a substituição do índice de potência, n , pelo índice de potência aparente, n' , do fluido correspondente, ver Tabela 1-1, como mostra a expressão (5.1).

$$Nu' = \frac{9,8694(26,7773n'^2 + 11,7895n' + 1)}{38,0066n'^2 + 12,7778n' + 1} \quad (5.1)$$

À semelhança do que foi referido no capítulo anterior, também será com taxa de deformação característica $\dot{\gamma} = 12\bar{U}/D_H$ que se irá calcular o índice de potência aparente, n' , através do qual se irá calcular Nu' .

5.2 Número de Nusselt numérico

Tal como no capítulo 4, para efeitos de quantificação do erro encontrado no cálculo do número de Nusselt simplificado, expressão (5.1), será necessário definir o número de Nusselt exato, Nu , sendo estes valores os utilizados como referência. Este foi calculado exatamente da mesma forma que no capítulo anterior, por integração numérica da equação de conservação de energia, como pode ser verificado em Silva (2012) no seu Anexo B, adaptado agora ao caso das coordenadas cartesianas.

À semelhança do referido no capítulo anterior, a integração foi realizada utilizando o método das diferenças finitas com malhas sucessivamente mais refinadas. No primeiro caso utilizaram-se 3000 pontos ao longo de H , meia distância entre as placas, obtendo-se o número de Nusselt designando por Nu_I , em seguida realizaram-se integrações com 6000, 12000 e 24000 pontos ao longo de H , originando os números de Nusselt Nu_{II} , Nu_{III} e Nu_{IV} , respetivamente. Os erros $Nu_{II}-Nu_I$, $Nu_{III}-Nu_{II}$ e $Nu_{IV}-Nu_{III}$ estão patentes no Anexo D para todos os casos analisados. Pode-se assim verificar no referido anexo que o erro máximo encontrado, $Nu_{IV}-Nu_{III}$, ocorreu para o fluido Carreau-Yasuda e foi de $7,85 \times 10^{-5}$. Este facto já era esperado pois para este fluido o perfil de velocidades também foi calculado numericamente o que representa uma fonte de erro adicional. Nos restantes fluidos analisados o erro máximo, $Nu_{IV}-Nu_{III}$, nunca ultrapassou o valor de $2,98 \times 10^{-8}$. Estes resultados mostram a elevada exatidão inerente aos valores de Nusselt, neste caso Nu_{IV} , usados como referência.

5.3 Resultados

Nesta secção serão apresentados, os resultados obtidos para o número de Nusselt pela aplicação do método simplificado. Para os devidos cálculos, da mesma forma que no caso de fluxo de calor constante na parede, será necessário, primeiramente, conhecer, para os diversos fluidos, a velocidade média, \bar{U} e o diâmetro hidráulico, D_H para a determinação da taxa de deformação, $\dot{\gamma} = 12\bar{U}/D_H$. Posteriormente, conhecendo as restantes características do escoamento e do fluido, Tabela 1-5, é possível o cálculo do índice de potência aparente, n' , expressões presentes na Tabela 1-1. Finalmente, será possível representar graficamente tanto a variação do Nu' e Nu em função do grupo adimensional relevante de cada fluido, como do erro encontrado entre estes. O referido erro foi calculado segundo a expressão (1.14), $|Nu - Nu'|/Nu\%$, sendo este avaliado para cerca de 1500 valores distintos do grupo adimensional relevante de cada fluido, exceto para um dos fluidos Carreau-Yasuda em que o erro foi avaliado para cerca de 2100 valores distintos do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$.

5.3.1 Modelo sPTT

Para o cálculo do número de Nusselt pelo método simplificado para temperatura constante na parede, Nu' , expressão (5.1), foi pois utilizado a sequência de cálculo descrita anteriormente.

Tabela 3-1 – Propriedades reológicas do fluido sPTT utilizado.

sPTT	$\eta [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\varepsilon [-]$	$\lambda [\text{s}]$	$H [\text{m}]$
	0,55	1,1	10	0,2

Após os devidos cálculos, conhecendo as características reológicas do fluido sPTT utilizado, ver Tabela 3-1 aqui transcrita para maior comodidade, realizados em cerca de 1500 valores distintos de \bar{U} foi possível traçar o gráfico com a variação do Nu' em função do grupo adimensional correspondente, $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$. Para o cálculo do erro foi utilizado a expressão (1.14), sendo necessário, primeiramente a determinação do número de Nusselt exato, $Nu \equiv Nu_{IV}$.

$$\varepsilon_{Nu'} = \frac{|Nu - Nu'|}{Nu} \times 100\% \quad (1.14)$$

Desta forma, o erro máximo encontrado, para o fluido sPTT, entre o número de Nusselt simplificado e o Nusselt exato foi de 1,48%, como se pode averiguar pela Figura 5-1, onde está representado a variação dos números de Nusselt Nu' e Nu em função de $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$.

De referir que os resultados finais adimensionais são genéricos e portanto válidos para qualquer fluido sPTT, sucedendo o mesmo para os restantes fluidos analisados com exceção do Carreau-Yasuda onde a generalidade é mais restrita.

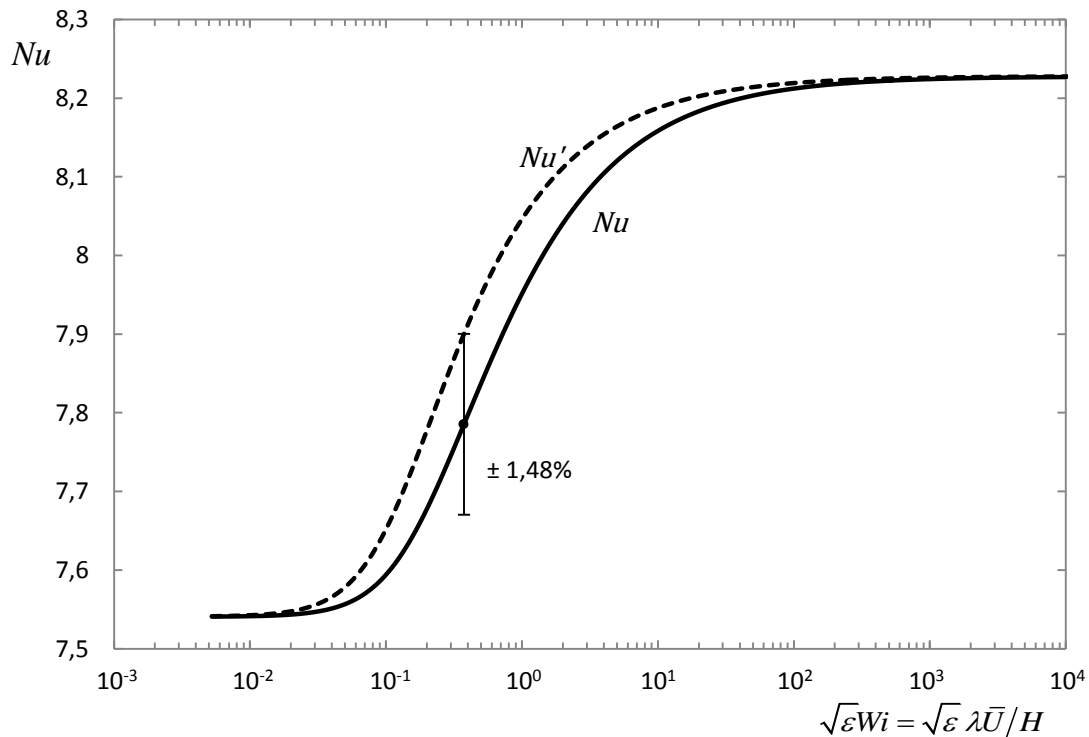


Figura 5-1 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U}/H$ para o fluido sPTT. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

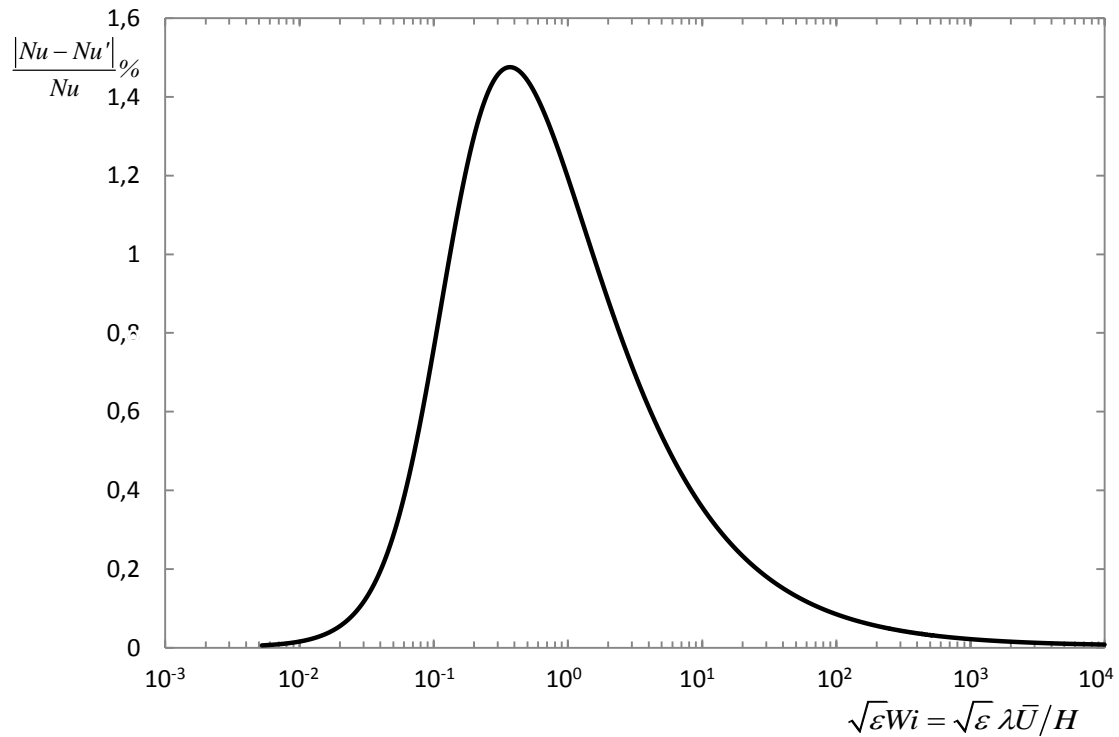


Figura 5-2 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido sPTT em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$.

Para uma melhor percepção da distribuição do erro, na Figura 5-2 apresenta-se a variação do erro com o valor de $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$.

5.3.2 Modelo Herschel-Bulkley

Para este modelo foram testados 3 fluidos, como mostra a Tabela 3-2, aqui transcrita para maior comodidade. De referir que está-se na presença do fluido de Bingham quando $n = 1$.

Tabela 3-2 – Propriedades reológicas dos três fluidos Herschel-Bulkley utilizados.

Bingham e Herschel- Bulkley	$\mu_{\infty} \equiv K [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\tau_0 [\text{Pa}]$	$n [-]$	$H [\text{m}]$
	0,05	0,07	0,5 1 1,5	0,2

Utilizando o mesmo método de cálculo que o utilizado no sPTT, foi possível apresentar as evoluções dos números de Nusselt, Nu' e Nu , do erro entre ambos em

função do grupo adimensional relevante para o modelo Herschel-Bulkley, $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$, figuras 5-3 e 5-4, respetivamente para o caso de $n = 0,5$. Como se pode averiguar pela análise das figuras anteriormente mencionadas, o erro máximo registado foi de 1,30%.

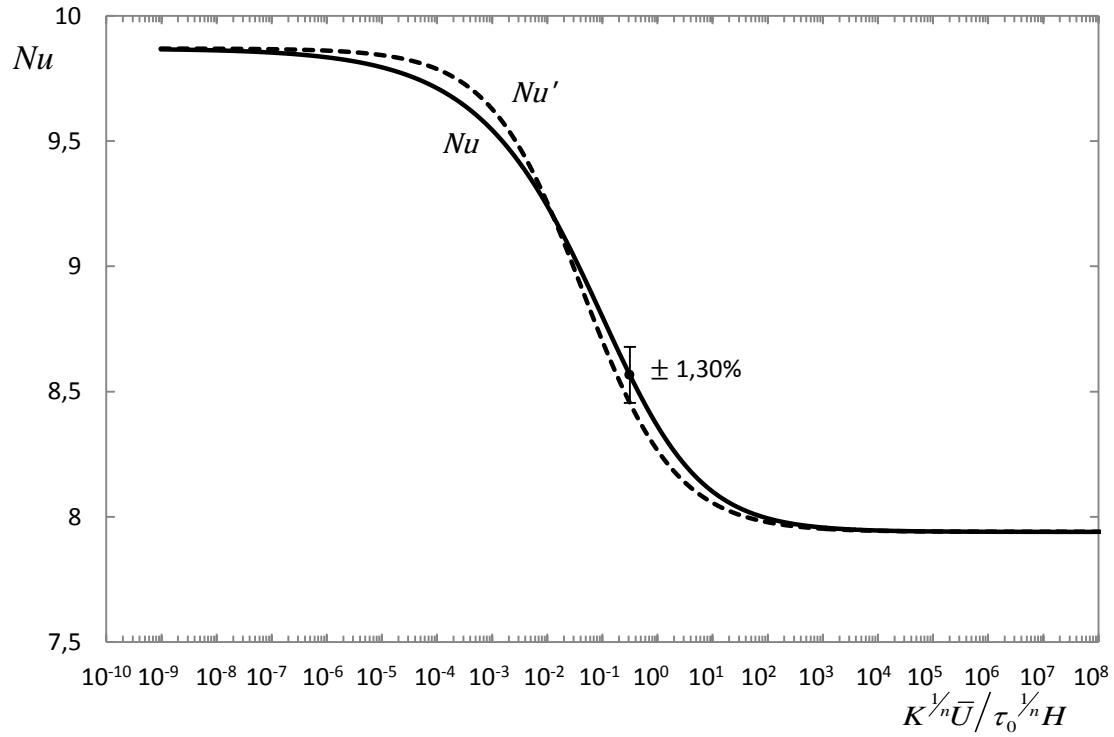


Figura 5-3 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para $n=0,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

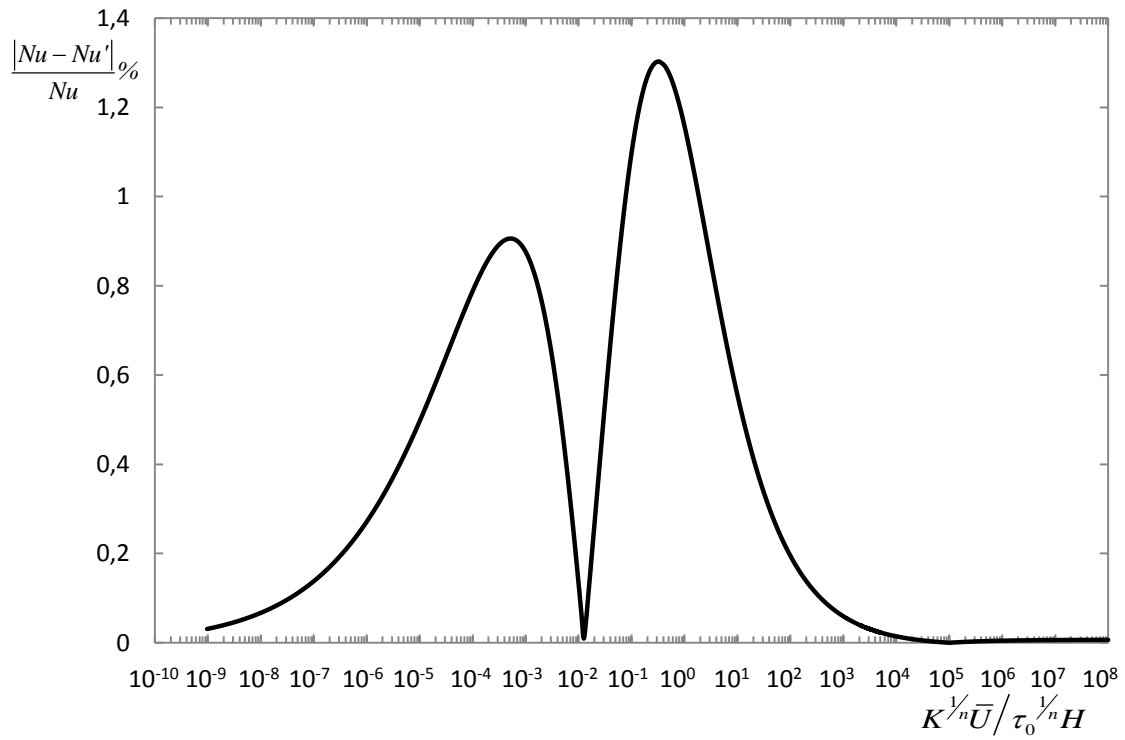


Figura 5-4 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=0,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

Para o fluido de Bingham, $n = 1$, o erro máximo registado foi de 3,13%, como se pode verificar pelas figuras 5-5 e 5-6, onde se apresentam as evoluções dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre ambos, respetivamente, em função do parâmetro $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

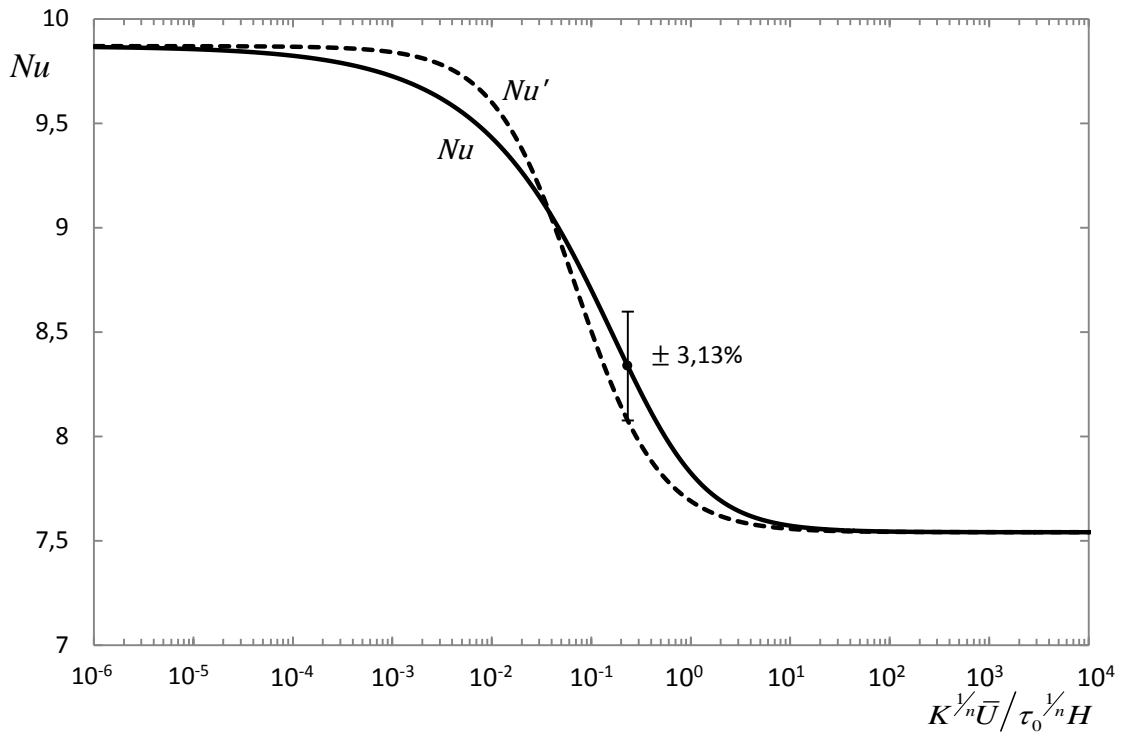


Figura 5-5 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para $n=1$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

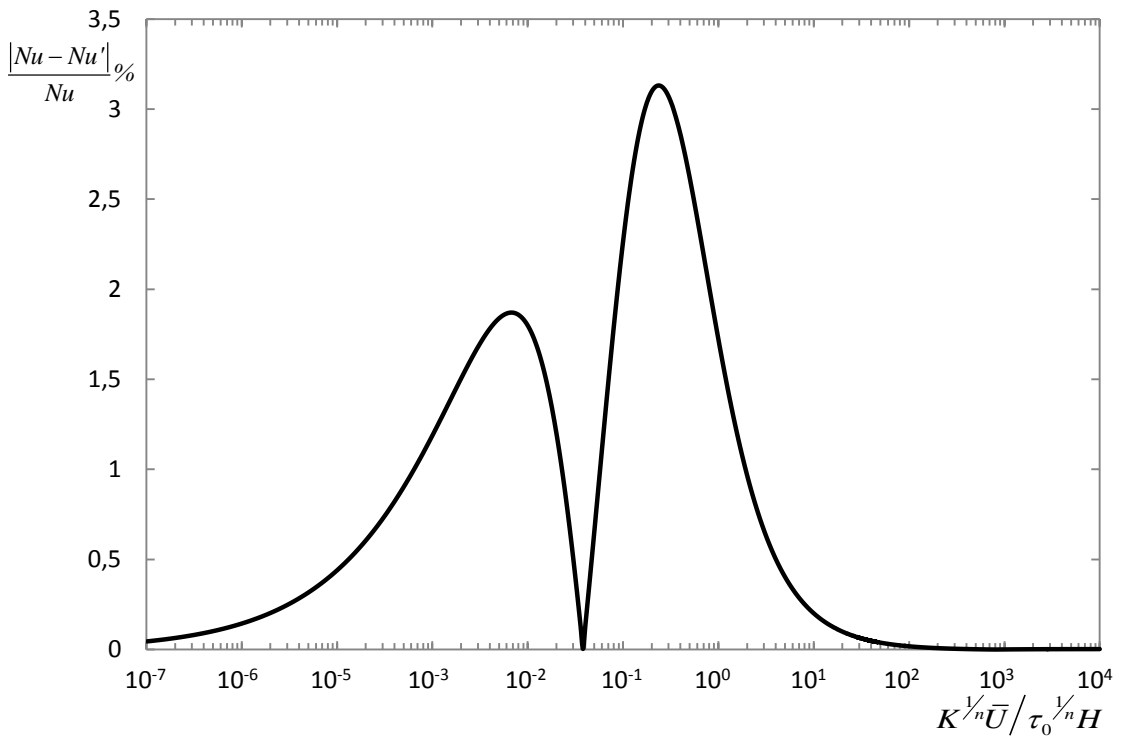


Figura 5-6 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

As figuras 5-7 e 5-8 representam, respetivamente, a variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre ambos em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para o caso de $n = 1,5$. Como se pode verificar, o erro máximo obtido foi neste caso de 4,57%.

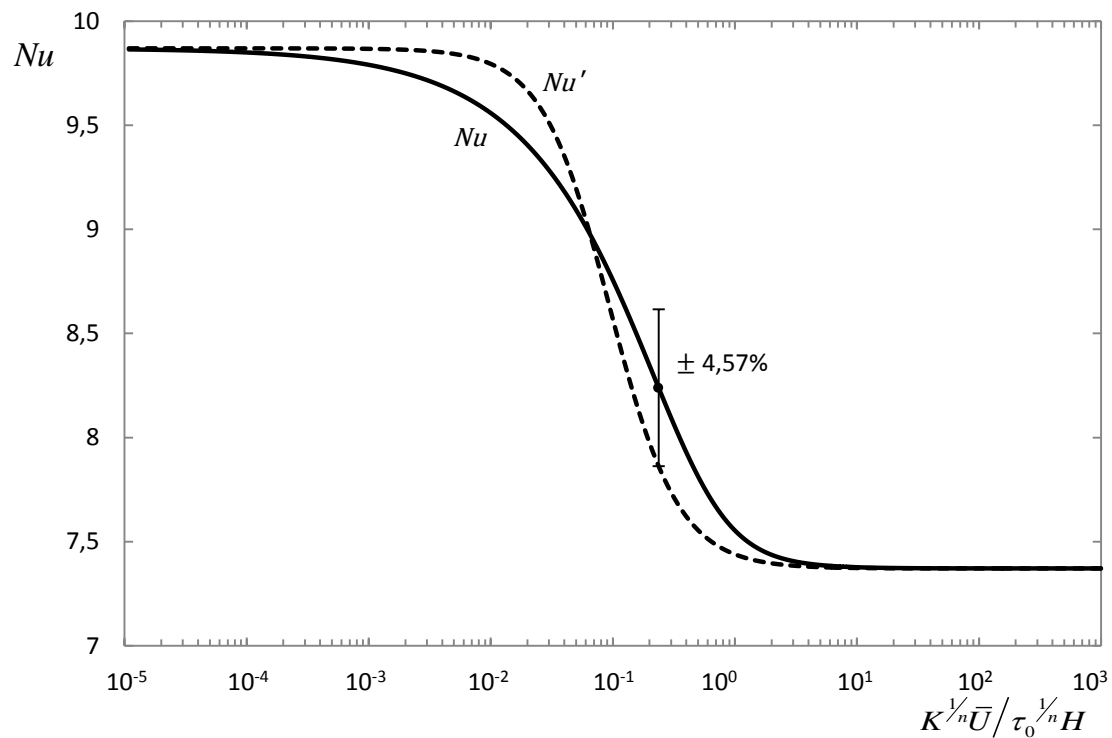


Figura 5-7 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $K^{1/n}\bar{U}/\tau_0^{1/n}H$ para $n=1,5$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

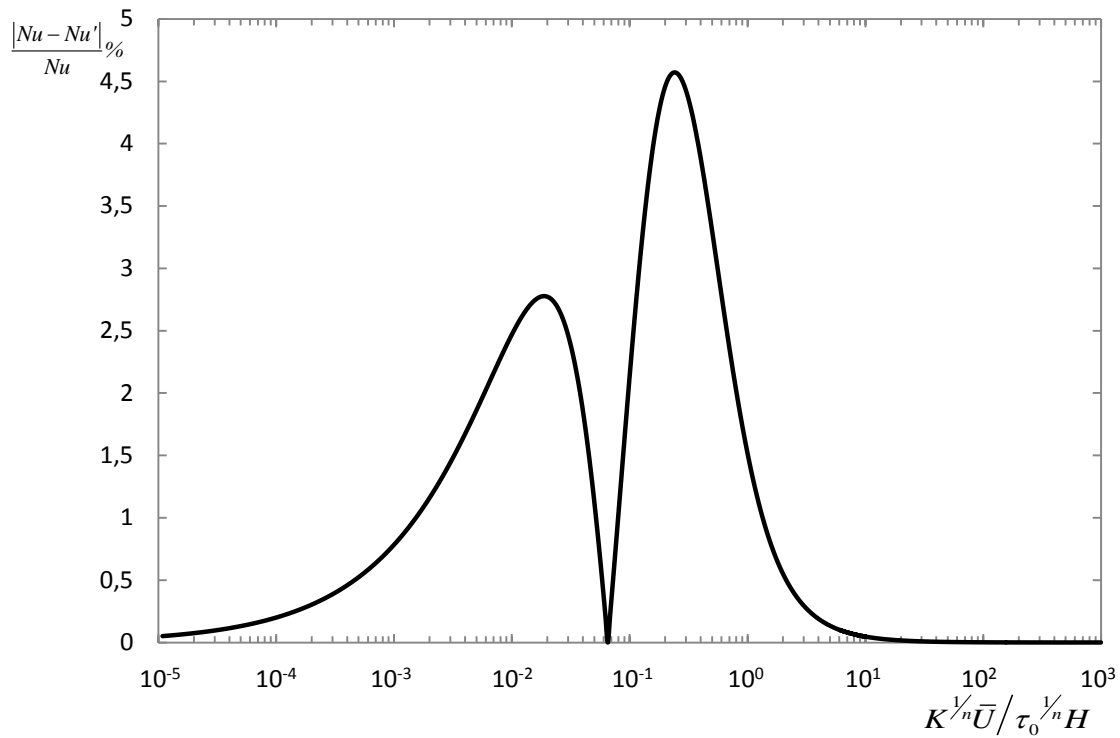


Figura 5- 8 - Variação do erro relativo no Nu' para $n=1,5$ em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$.

5.3.3 Modelo de Casson

Para o modelo de Casson, no cálculo de Nu , foram utilizados os parâmetros reológicos indicadas na Tabela 3-3, aqui transcrita para maior comodidade.

Tabela 3-3 – Propriedades reológicas do fluido de Casson utilizado.

Casson	$\mu_{\infty} [\text{Pa} \cdot \text{s}]$	$\tau_0 [\text{Pa}]$	$H [\text{m}]$
	0,55	0,062502	0,2

Após os devidos cálculos encontrou-se neste caso um erro máximo de 1,77%. As figuras 5-9 e 5-10 apresentam a variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre ambos, respetivamente, com o aumento do valor de $\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$, grupo adimensional relevante para este fluido.

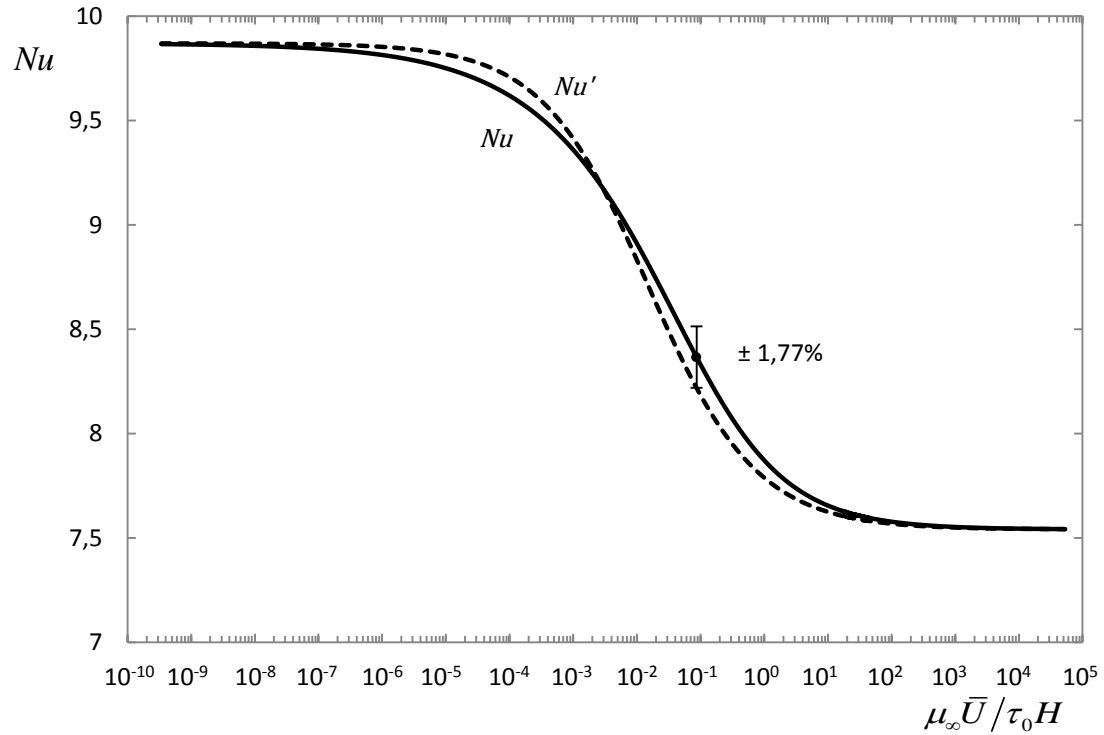


Figura 5-9 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$ para o fluido Casson. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

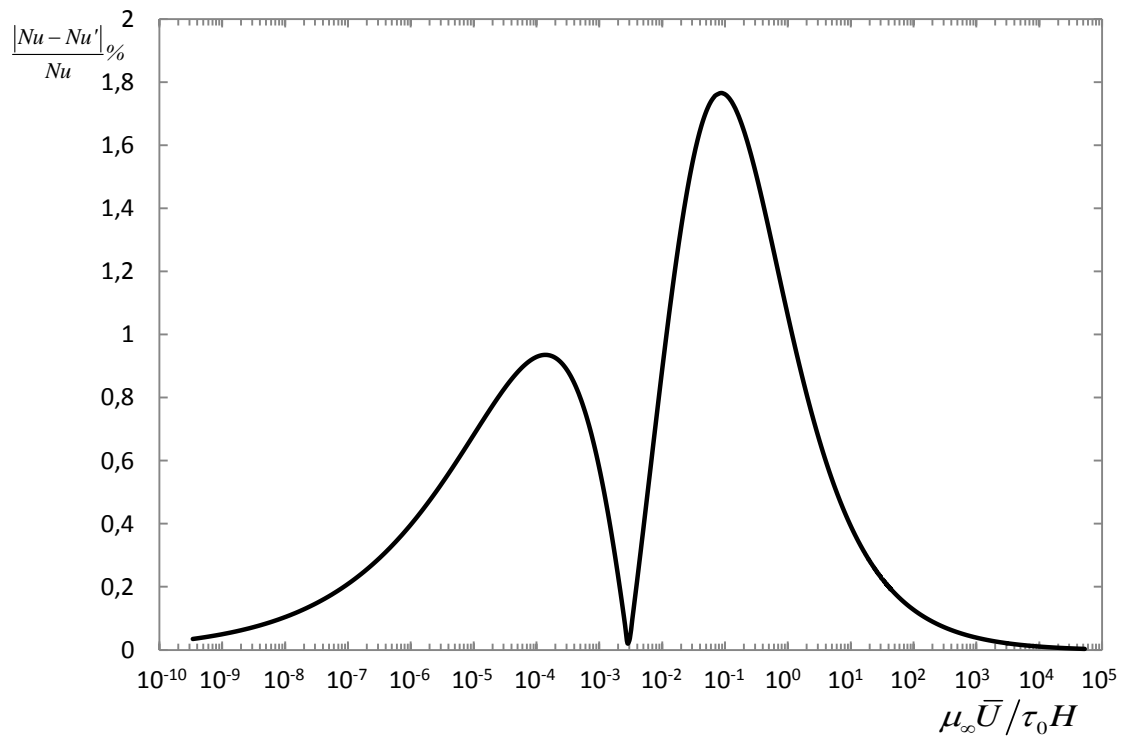


Figura 5-10 - Variação do erro relativo no Nu' do fluido Casson em função do grupo adimensional $\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$.

5.3.4 Modelo Carreau-Yasuda

Para o modelo Carreau-Yasuda foram analisados dois fluidos, sendo que as suas propriedades são apresentas na Tabela 3-4, aqui transcrita para maior comodidade.

Tabela 3-4 – Propriedades reológicas dos dois fluidos Carreau-Yasuda utilizados.

Carreau-Yasuda	μ_{∞} [Pa·s]	μ_0 [Pa·s]	Λ [s]	a [–]	n [–]	H [m]
	0,08	1	10	1,5	0,2	0,2
	0,000108			2	0,358	

Após os devidos cálculos, para o fluido Carreau-Yasuda com $n = 0,2$, $a = 1,5$ e $\mu_{\infty}/\mu_0 = 0,08$, o erro máximo encontrado foi de 1,74%. As figuras 5-11 e 5-12 apresentam a variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre ambos, respectivamente, em função do parâmetro adimensional $\Lambda \bar{U}/H$.

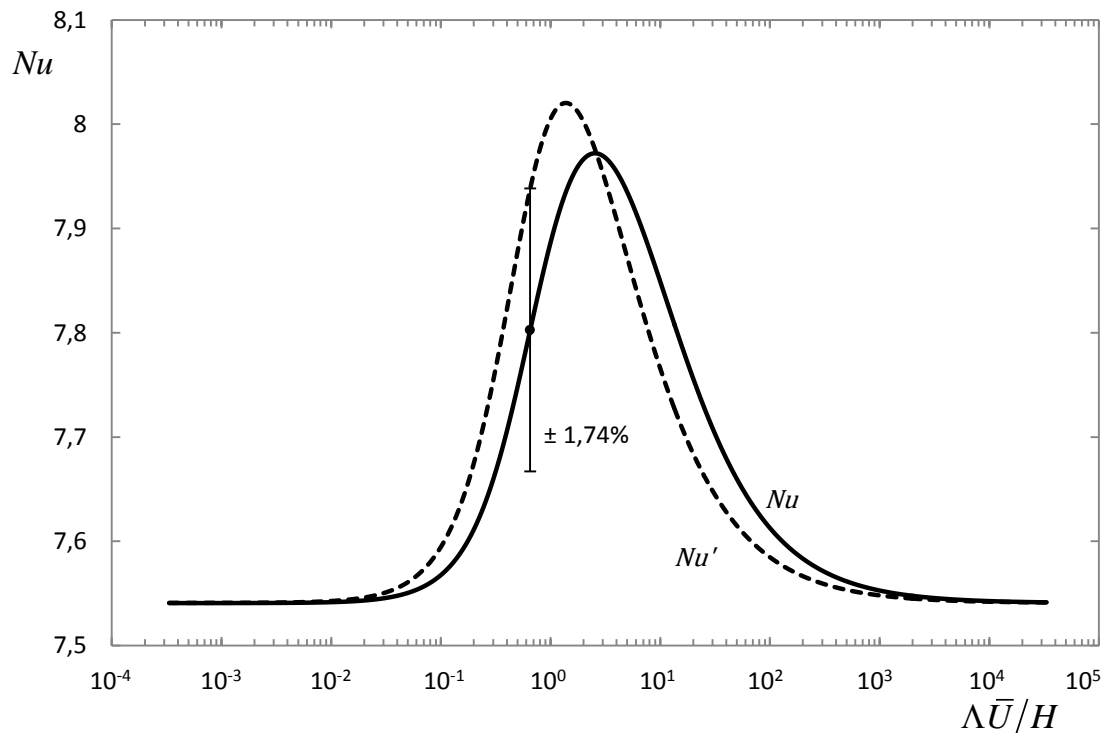


Figura 5-11 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

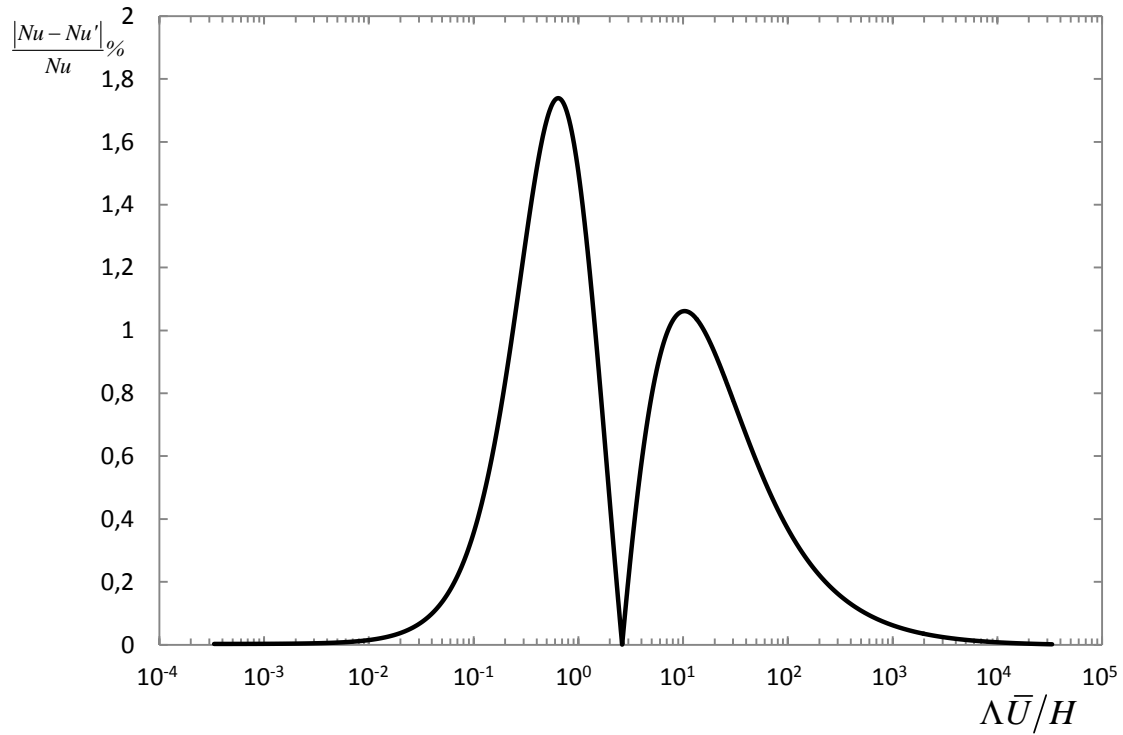


Figura 5-12 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$ em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U}/H$.

As figuras 5-13 e 5-14 apresentam a evolução dos números de Nusselt, Nu' e Nu , e do erro entre ambos, respetivamente, em função do grupo adimensional relevante, $\Lambda \bar{U}/H$, para o caso de um fluido Carreau-Yasuda com $n=0,358$, $a=2$ e $\mu_\infty/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$. O erro máximo encontrado para este caso foi de 2,19%.

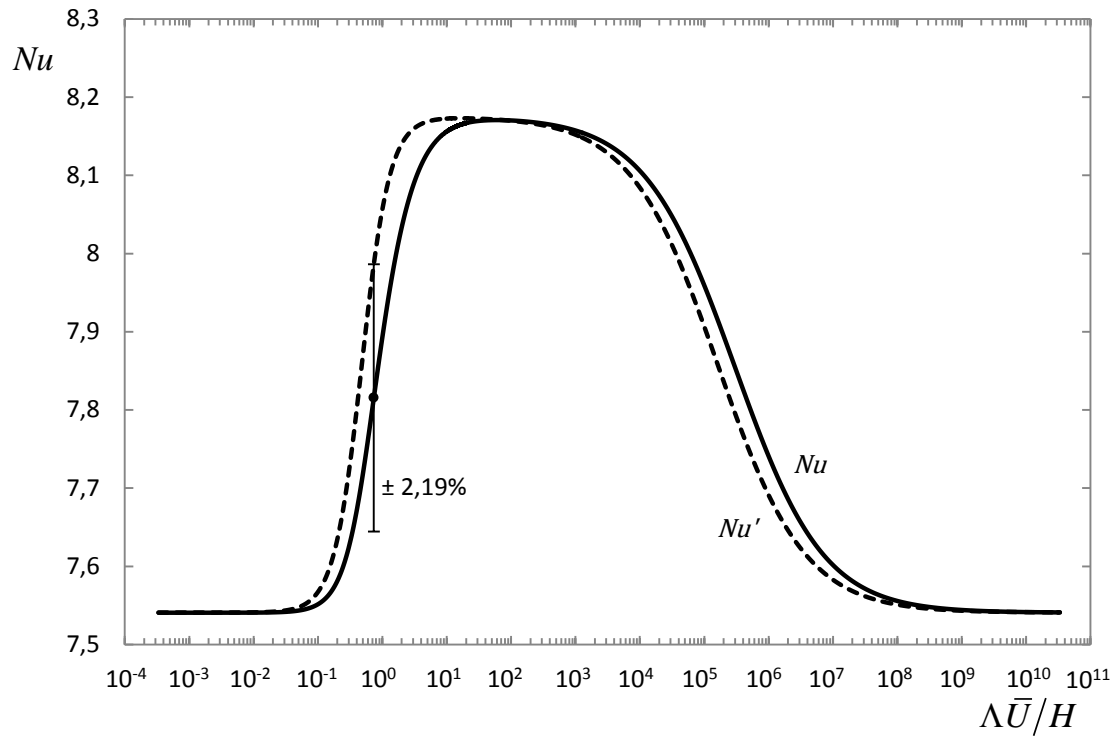


Figura 5-13 - Variação dos números de Nusselt, Nu' e Nu , em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$. Linhas: ----- número de Nusselt simplificado, Nu' ; — número de Nusselt exato, Nu . A barra vertical representa o erro máximo verificado e a sua localização.

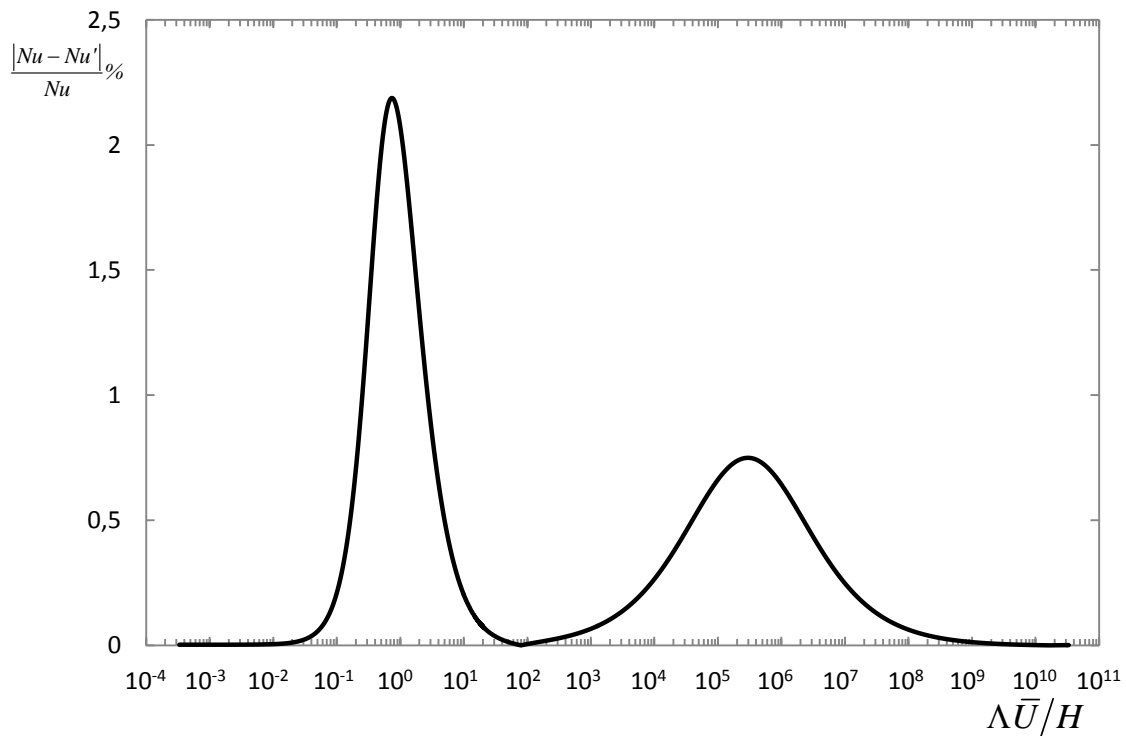


Figura 5-14 - Variação do erro relativo no Nu' para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08\times 10^{-4}$ em função do grupo adimensional $\Lambda\bar{U}/H$.

De referir que para o fluido Carreau-Yasuda com $n = 0,358$, $a = 2$ e $\mu_{\infty}/\mu_0 = 1,08 \times 10^{-4}$ foi necessário analisar uma maior quantidade de pontos, cerca de 2100 pontos, para assim realizar uma análise mais completa da variação do erro em função do parâmetro $\Lambda \bar{U}/H$.

5.4 Resumo

Na Tabela 5-1 estão patentes os erros máximos encontrados para todos os fluidos analisados ao longo deste capítulo.

Tabela 5-1 - Resumo dos erros máximos encontrados para o número de Nusselt simplificado, Nu' , para fluxo de calor constante na parede de todos os fluidos estudados.

Fluidos		Erro Nu' [%]
sPTT	-	1,48
Bingham e Herschel- Bulkley	$n = 0,5$ $n = 1$ $n = 1,5$	1,30 3,13 4,57
Casson	-	1,77
Carreau- Yasuda	$n = 0,2$ $a = 1,5$ $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} = 0,08$ $n = 0,358$ $a = 2$ $\frac{\mu_{\infty}}{\mu_0} = 1,08 \times 10^{-4}$	1,74 2,19

À semelhança do que aconteceu para fluxo de calor constante na parede, o fluido que apresentou um maior erro foi o Herschel-Bulkley para $n = 1,5$, 4,57%, como se pode verificar pela Tabela 5-1.

Cálculo simplificado do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos entre placas paralelas

Também neste caso se constata que os erros inerentes ao método simplificado são perfeitamente aceitáveis em aplicações de engenharia.

6 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi avaliado o desempenho da aplicação do método simplificado ao cálculo do coeficiente de atrito e do número de Nusselt num escoamento laminar entre placas paralelas. No estudo de transferência de calor foram analisados os casos de fluxo de calor constante e temperatura constante na parede da conduta.

Os modelos reológicos dos fluidos analisados foram o Phan-Thien–Tanner simplificado (sPTT), Herschel-Bulkley, Bingham, Casson e Carreau-Yasuda. Deste modo, para cada modelo, foram testados dois processos de cálculo do coeficiente de atrito através do método simplificado, f'' e f''' , sendo que os resultados obtidos a partir destes foram comparados com os resultados exatos, obtidos analiticamente, para todos os casos, exceto para o fluido Carreau-Yasuda cujo resultado exato foi obtida numericamente. Os resultados obtidos a partir da expressão do número de Nusselt pela aplicação do método simplificado, Nu' , foram comparados com os resultados exatos obtidos para todos os fluidos pela via numérica. As principais conclusões dignas de realce serão mencionadas de seguida.

Os desvios máximos encontrados entre f'' e os valores exactos oscilaram entre 2,06% e 9,30%. Para f''' os erros máximos variaram entre 0,97% e 8,42%. De realçar que tanto para f'' como para f''' o fluido que apresentou um menor erro máximo foi o sPTT e o que apresentou um erro máximo mais elevado foi o Herschel-Bulkley com $n=1,5$. Para todos os fluidos, à excepção do Carreau-Yasuda, o erro máximo encontrado com f''' foi inferior ao associado com f'' podendo-se concluir que a abordagem deduzida especificamente para placas paralelas, f''' , conduz, regra geral, a um resultado mais correto por comparação com o resultado exato.

Para Nu' no caso de fluxo de calor constante na parede, os desvios máximos encontrados variaram entre 1,67% e 5,05%. Para o caso de temperatura constante na parede, os erros máximos oscilaram entre 1,30% e 4,57%. Tanto na primeira como na segunda condição de fronteira, o fluido a que correspondeu um menor erro máximo foi o Herschel-Bulkley com $n=0,5$ e o que apresentou um erro máximo mais elevado foi

também o fluido Herschel-Bulkley, mas para $n = 1,5$. Os erros obtidos para o coeficiente de atrito, por qualquer das duas abordagens, como para o cálculo do número de Nusselt são também perfeitamente aceitáveis em cálculos de engenharia.

Pode-se concluir desta forma que o método simplificado apresenta condições para ser uma opção válida tanto para o cálculo do coeficiente de atrito como para o número de Nusselt, em alternativa às soluções analíticas ou numéricas. Este método é particularmente útil em casos como o fluido Carreau-Yasuda, cujo modelo reológico facilmente se ajusta à curva de viscosidade de corte de qualquer fluido não-Newtoniano, e onde uma solução analítica através da qual se possa calcular o f exato é impossível de obter.

Com a conclusão deste trabalho, vindo este na sequência de outros dois, Cruz (2010) e Silva (2012), fica, assim, disponível na literatura, um conjunto de ferramentas úteis e simples para a determinação do coeficiente de atrito e do número de Nusselt para qualquer fluido não-Newtoniano a escoar em regime laminar agora entre placas paralelas tanto para fluxo de calor constante como para temperatura de parede constante.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para trabalhos futuros, seria interessante analisar o desempenho do método simplificado no escoamento turbulento de fluidos inelásticos em ambos os casos, cálculo do coeficiente de atrito e cálculo dos números de Nusselt.

No caso do escoamento laminar entre placas paralelas, também se poderá futuramente estudar o desempenho do método simplificado no cálculo do número de Nusselt quando a dissipação viscosa está presente.

Referências Bibliográficas

- Bird, R.B., Armstrong, R.C. e Ole H. (1987), The generalized Newtonian fluid Dynamic. Dynamics of polymeric liquids Cap.4, Cap.5 (2ª edição), Wiley-Interscience Publication.
- Coelho, P.M. (2000), Escoamento de fluido não-Newtoniano em torno de um cilindro, Dissertação para a obtenção de grau de doutor em engenharia mecânica na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Coelho, P.M. e Pinho, F.T. (2008), A generalized Brinkman number for non-Newtonian duct flows, J. Non-Newtonian Fluid Mech, Vol. 156 pp. 202-206.
- Cruz, D.A. (2010), Cálculo simplificado do coeficiente de atrito e do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos em condutas circulares, Dissertação para a obtenção de grau de mestre em engenharia mecânica na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Cruz, D.A., Coelho, P.M. e Alves, M.A. (2012), A simplified of Method for Calculating Heat Transfer Coefficients and Friction Factors in Laminar Pipe Flow of Non Newtonian fluids, Journal of Heat Transfer ASME Vol. 134, Setembro.
- Çengel, Y.A. e Cimbala, J.M. (2007), Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações, Cap. 2 (1ª edição), McGraw-Hill.
- Çengel, Y.A. e Turner, R.H. (2005), Fundamentals of Thermal-Fluid Sciences, McGraw-Hill, Cap. 19, pp. 873-875.
- Hanks, R.W. (1963), The laminar-turbulent transition for flow in pipes, concentric annuli and parallel plates, AIChE J., Vol. 9, Janeiro.
- Hartnet, J.P., Cho, Y.I. e Rohsenow, W.M. (1998), Handbook of Heat Transfer, Non-Newtonian fluids, Cap.10 (3ª edição), McGraw-Hill.
- Incropera, F.P., Dewitt, D.P., Bergman, T.L. e Lavine, A.S. (2011), Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa, (6ª edição), LTC.

- João, A.M.R, (2001), Escoamentos anulares de fluidos não-Newtonianos, Dissertação para a obtenção de grau de doutor em engenharia mecânica na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Kozicki, W., Chou, C.H. e Tiu, C. (1966), Non-newtonian Flow in Ducts of Arbitrary Cross-Sectional Shape, *Chem. Eng. Sci.*, Vol. 21, pp. 665-679.
- Metzner, A. B. e Reed, J. C. (1955), Flow of non-newtonian fluids – correlation of laminar, transition and turbulent-flows regions. *AIChE Journal*, Vol.1, pp. 434-440.
- Min, T., e Yoo, J. Y. (1999), Laminar Convective Heat Transfer of a Bingham Plastic in a Circular Pipe with Uniform Wall Heat Flux: The Graetz Problem Extended, *ASME Trans. J Heat Transfer*, Vol. 121, pp. 556–563.
- Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H. e Huebsch, W.W. (2009), *Fundamentals of Fluid Mechanics*, (6ª edição), John Wiley & Sons.
- Oliveira, P.J. e Pinho, F.T. (1999), Analytical solution for fully-developed channel and pipe flow of Phan-Thien–Tanner fluids, *J. Fluid Mech*, Vol. 387 pp. 271-280.
- Pinho, F.T. e Coelho, P.M. (2009), Non-Newtonian Heat Transfer, Cap. 17, *Encyclopedia of Life Support System (EOLSS)*.
- Poole, R.J. e Chhabra, R.P. (2010), Development Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Yield Stress fluids, *Journal of Fluids Engineering-transactions of The Asme – J Fluid Eng*, Vol. 132, no. 3.
- Silva, A.B. (2012), Cálculo simplificado do número de Nusselt em escoamentos laminares de fluidos não-Newtonianos no interior de condutas com temperaturas de parede constante, Dissertação para a obtenção de grau de mestre em engenharia mecânica na Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.
- Skelland, A.H.P. (1967), *Non-Newtonian flow and heat transfer*, John Wiley & Sons., pp. 428-431
- Trinh, K.T. (2010), On the critical Reynolds number for transition from laminar to turbulent flow, *Institute of Food Nutrition and Human Health*, Massey University, New Zealand.

Zang, T.A. e Krist, S.E. (1989), Numerical Experiments on Stability and Transition in Plane channel flow, Theoretical and Computational Fluid Dynamics.

Anexos

Anexo A: Avaliação dos resultados numéricos do coeficiente de atrito

Para o modelo Carreau-Yasuda a velocidade média foi obtida numericamente tendo sido arbitrado o valor da taxa de deformação na parede, Silva (2012). A integração foi efectuada utilizando 3000, 6000, 12000 e 24000 pontos ao longo da direcção perpendicular à parede medida a partir do plano de simetria da conduta, os quais deram origem aos valores de coeficiente de atrito de f_I , f_{II} , f_{III} e f_{IV} , respectivamente. As diferenças nos valores do coeficiente de atrito obtidos, $|f_{II} - f_I|$, $|f_{III} - f_{II}|$ e $|f_{IV} - f_{III}|$, serão representadas graficamente para os dois fluidos Carreau-Yasuda. As figuras A-1 e A-2 representam a variação das diferenças do coeficiente de atrito em função do parâmetro adimensional, $\lambda \bar{U}/H$ para os dois fluidos estudados.

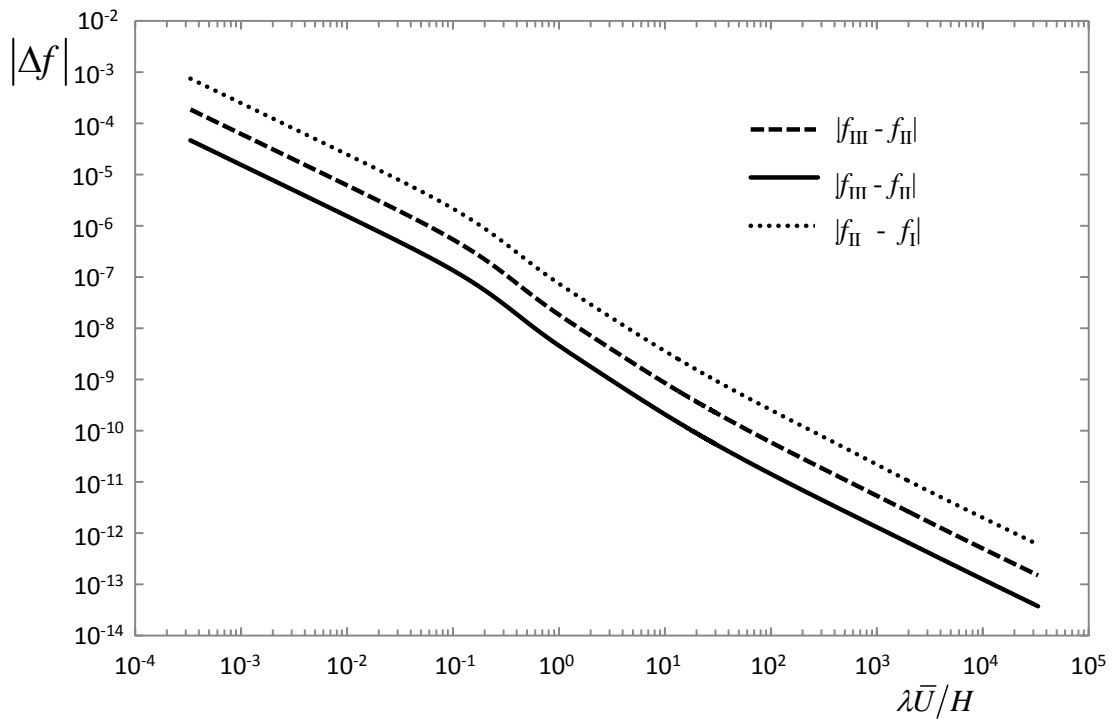


Figura A-1 - Diferença entre os valores do coeficiente de atrito em função do grupo adimensional $\lambda \bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$.

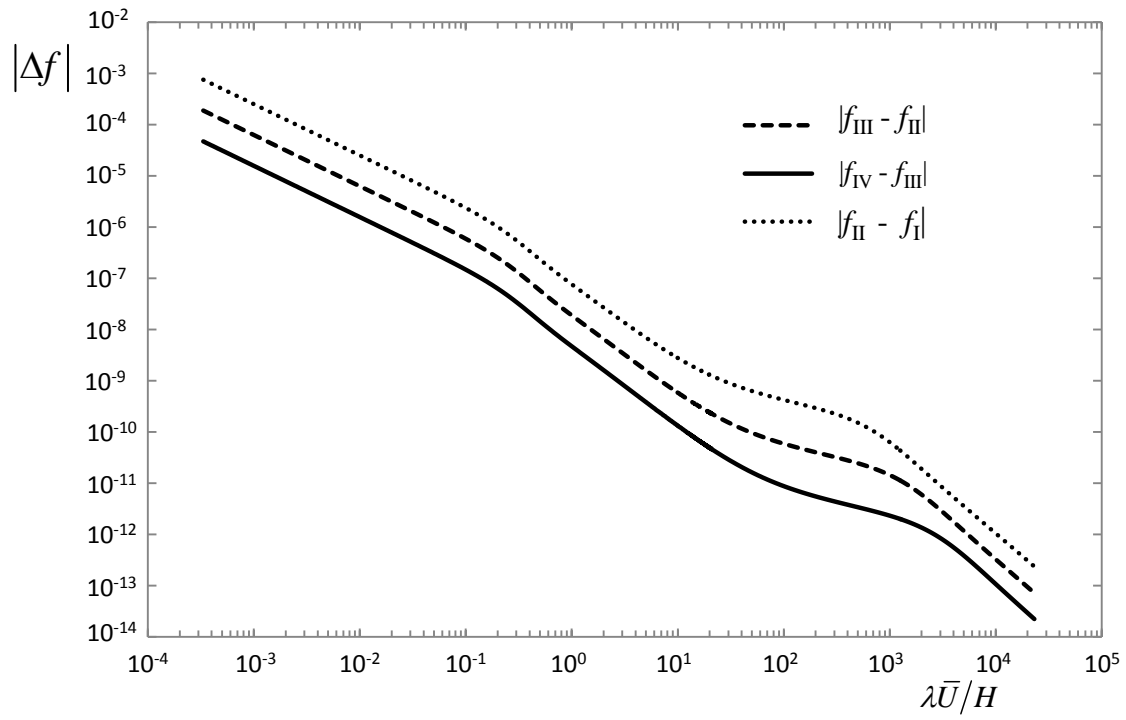


Figura A-2 - Diferença entre os valores do coeficiente de atrito em função do grupo adimensional $\lambda \bar{U}/H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$.

Anexo B: Dedução da expressão do número de Nusselt para fluidos lei de potência

Neste anexo, ir-se-á apresentar a dedução da expressão do número de Nusselt para fluidos lei de potência que será utilizada no método simplificado para o caso de fluxo de calor constante na parede, comparando-a com a expressão existente na literatura. Assim, partindo da equação de conservação de energia, simplificando-a e integrando-a, será obtida a equação do perfil de temperatura que após algumas substituições dará origem à expressão do número de Nusselt, tendo esta já sido deduzida também por Silva (2012) e aqui reproduzida para complementar o presente trabalho.

B.1 Expressão de Nu para fluidos lei de potência

B.1.1 Equação da energia

No caso de um perfil totalmente desenvolvido num escoamento entre placas paralelas, a equação de conservação de energia é dada pela expressão (B.1).

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \tau_{yx} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{B.1})$$

sendo ρ a massa volúmica, c_p o calor específico do fluido, u a componente axial da velocidade, T a temperatura do fluido, x a coordenada na direcção axial, v a componente da velocidade na direcção normal à parede, y a coordenada nessa mesma direcção medida a partir do plano de simetria da conduta, k a condutividade térmica e τ_{yx} a tensão de corte.

Neste trabalho como se trata de escoamento totalmente desenvolvido e desprezando a dissipação viscosa, a equação anterior da conservação de energia é reduzida à seguinte expressão,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{B.2})$$

onde as condições de fronteira são,

$$\begin{cases} y = 0; \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ y = H; T = T_w(x) \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Como a expressão anterior se encontra numa forma dimensional e para o cálculo do número de Nusselt esta não tem carácter geral, será necessário então a adimensionalização desta. Assim sendo, as seguintes variáveis com um asterisco serão as variáveis adimensionais utilizadas para o efeito.

$$y^* = \frac{y}{H} \quad (\text{B.4})$$

$$x^* = \frac{x}{D_H} \quad (\text{B.5})$$

$$u^* = \frac{u}{\bar{U}} = \frac{2n+1}{n+1} \left(1 - (y^*)^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (\text{B.6})$$

$$T^* = \frac{T - T_0}{\dot{q}_w \frac{D_H}{k}} \quad (\text{B.7})$$

onde H é metade da distância entre placas, $D_H = 4H$ é o diâmetro hidráulico, \bar{U} é a velocidade média do escoamento na conduta, n é o índice de potência, T_0 é a temperatura média do fluido numa secção a montante do local de integração e \dot{q}_w é o fluxo de calor constante na parede. A expressão (B.6) representa o perfil de velocidade adimensional para um fluido lei de potência a escoar entre placas paralelas.

A equação da conservação de energia para um escoamento entre placas paralelas para fluxo de calor constante na parede pode ainda ser simplificada fazendo um balanço de energia num troço da conduta como está ilustrado na figura B-1, onde B é a largura da placa.

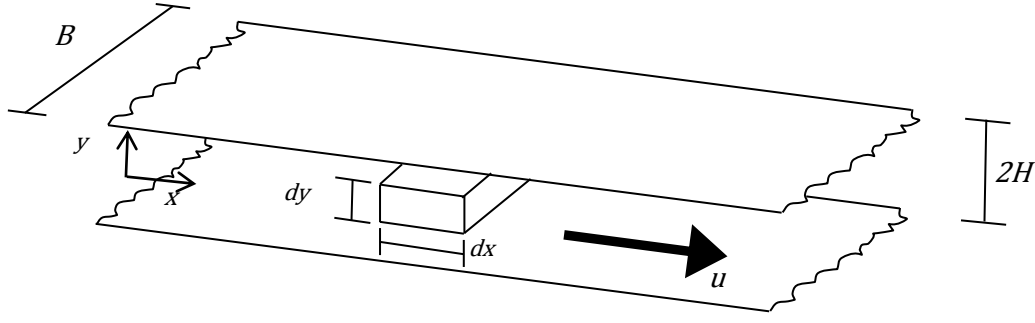


Figura B-1 - Representação do troço de um escoamento entre placas paralelas para o balanço de energia.

Assim, pela conservação de energia é possível inferir que,

$$\dot{q}_w dx 2B = \rho c_p \bar{U} 2HB d\bar{T} \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = \frac{Pe}{4} \quad (\text{B.8})$$

pois,

$$Pe = \frac{\rho c_p \bar{U} D_H}{k} \quad (1.34)$$

Silva (2012) refere ainda que segundo Çencel *et al.* (2005) é possível mostrar que,

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{dT_w}{dx} \quad (\text{B.9})$$

ou seja,

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{\dot{q}_w}{\rho c_p \bar{U} H} = \frac{dT}{dx} = \frac{dT_w}{dx} \quad (\text{B.10})$$

Adimensionalizando, então a equação da energia, expressão (B.2), resulta,

$$\frac{\dot{q}_w D_H}{k} \frac{k}{H^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = \rho c_p u \frac{\dot{q}_w D_H}{k} \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \frac{\bar{U}}{\bar{U} D_H} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = \frac{Pe}{4} \frac{H}{4H} u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (\text{B.12})$$

Sabendo que,

$$\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial x^*} = \frac{Pe}{4} \quad (B.13)$$

A equação final adimensionalizada para a conservação de energia é expressa da seguinte forma,

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} = \frac{u^*}{4} \quad (B.14)$$

B.1.2 Integração da equação da energia

Para a obtenção da expressão para o cálculo do número de Nusselt será necessário obter o perfil de temperatura através da integração da equação da energia, expressão (B.14). De referir que foi necessário integrar a equação duas vezes e que esta integração foi efectuada com suporte ao programa de cálculo simbólico Derive 5. As condições de fronteira da nova equação de energia adimensionalizada podem ser encontradas de seguida.

$$\begin{cases} y^* = 0; \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \\ y^* = 1; T^* = T_w^* \end{cases} \quad (B.15)$$

Após a primeira integração da expressão (B.14) obtém-se a seguinte expressão,

$$\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \int \frac{u^*}{4} dy^* = -\frac{y^* \left(n y^{*\frac{n+1}{n}} - 2n - 1 \right)}{4(n+1)} \quad (B.16)$$

A segunda integração e consequentemente equação final do perfil de temperatura é dada pela expressão (B.17),

$$T^*(y^*) = -\frac{n^2 y^{*3n+1/n}}{4(n+1)(3n+1)} + \frac{y^{*2} (2n+1)(3n+1) - (n+1)(4n+1)}{8(n+1)(3n+1)} + T_w^* \quad (B.17)$$

B.1.3 Expressão a utilizar no cálculo do número de Nusselt simplificado

Segundo Silva (2012), a obtenção da expressão para o cálculo do número de Nusselt que é função da temperatura na parede e da temperatura média do escoamento

num determinado local entre as placas paralelas, expressão (B.19), faz-se recorrendo à lei de Newton de arrefecimento aplicada na parede como se pode verificar na expressão (B.18).

$$\dot{q}_w = hA(T_w - \bar{T}) = h(T_w^* - \bar{T}^*) \frac{\dot{q}_w}{kD_H} \quad (\text{B.18})$$

Sabendo que a expressão do número de Nusselt foi mencionada no capítulo 1 e é apresentada de seguida,

$$Nu = \frac{hD_H}{k} \quad (1.36)$$

fica,

$$Nu = \frac{1}{(T_w^* - \bar{T}^*)} \quad (\text{B.19})$$

Como se pode observar na expressão (B.19), o número de Nusselt depende da temperatura da mistura, \bar{T} , logo é necessário obter esta temperatura. Assim, como \bar{T} provém da seguinte expressão,

$$\bar{T} = \frac{2 \int_0^H BuT dy}{2HB\bar{U}} \quad (\text{B.20})$$

adimensionalizando fica,

$$\bar{T}^* = \int_0^1 u^* T^* dy^* \quad (\text{B.21})$$

Substituindo as expressões (B.6) e (B.7), u^* e T^* , respectivamente, na expressão anterior e fazendo uso da ferramenta Derive 5 obtém-se como resultado final a temperatura da mistura adimensionalizada, como se pode verificar na expressão (B.22).

$$\bar{T}^* = \frac{2}{45(5n+2)} + \frac{1}{36(4n+1)} + T_w^* - \frac{2}{15} \quad (\text{B.22})$$

Finalmente, conhecendo a expressão para o perfil de temperatura, expressão (B.17), e a expressão para a temperatura de mistura, expressão (B.22), é possível

encontrar a equação para o número de Nusselt, fazendo a substituição destas na expressão (B.19). Após a devida substituição e consequente simplificação, a expressão final para o cálculo do número de Nusselt para um fluido lei de potência é dada por,

$$Nu = \frac{12(4n+1)(5n+2)}{32n^2 + 17n + 2} \quad (B.23)$$

Esta expressão pode ainda ser comparada com a encontrada na literatura, Skelland (1967), que após simplificação, verifica-se que estas são iguais, confirmando-se os cálculos anteriormente efetuados, com a vantagem da expressão (B.23) ser formalmente mais simples.

$$Nu = \frac{2}{\frac{1}{3}\left(\frac{5n+1}{4n+1}\right) - \left(\frac{n}{2n+1}\right)\left(\frac{n}{3n+1}\right) + \left(\frac{n}{3n+1}\right)\left(\frac{n}{4n+1}\right)\left(\frac{n}{5n+2}\right)} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right) \quad (B.24)$$

De referir ainda que tanto as expressões (B.23) como a (B.24) são aplicadas aos fluidos lei de potência pelo que para outros modelos não-Newtonianos é necessário a substituição do índice de potência, n , pelo índice de potência aparente, n' , do fluido correspondente, ficando da seguinte forma,

$$Nu' = \frac{12(4n'+1)(5n'+2)}{32n'^2 + 17n' + 2} \quad (4.1)$$

Anexo C: Avaliação dos resultados numéricos do número de Nusselt para fluxo de calor constante na parede

A integração numérica foi realizada utilizando o método das diferenças finitas com malhas sucessivamente mais refinadas. Assim, no primeiro caso utilizaram-se 3000 pontos ao longo de H , meia distância entre as placas, obtendo-se o número de Nusselt designado por Nu_I , em seguida realizaram-se integrações com 6000, 12000 e 24000 pontos ao longo de H , originando os números de Nusselt Nu_{II} , Nu_{III} e Nu_{IV} , respectivamente. As diferenças nos valores de Nusselt obtidos, $|Nu_{II}-Nu_I|$, $|Nu_{III}-Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV}-Nu_{III}|$, serão representadas graficamente para cada fluido. De referir que as integrações numéricas foram feitas para cerca de 1500 valores distintos de número de Nusselt, variando os parâmetros adimensionais relevantes entre 10^{-10} a 10^{10} . As figuras seguintes apresentam a variação das diferenças nos valores de Nusselt obtidos numericamente em função do grupo adimensional correspondente de cada fluido.

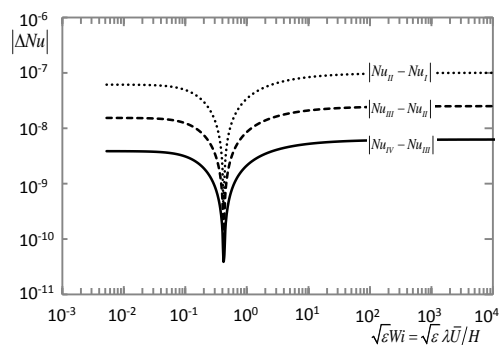


Figura C-1 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$ para o fluido sPTT.

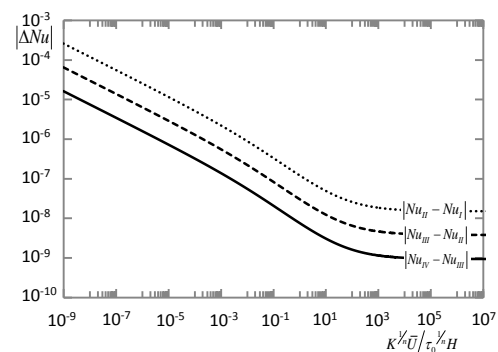


Figura C-2 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$.

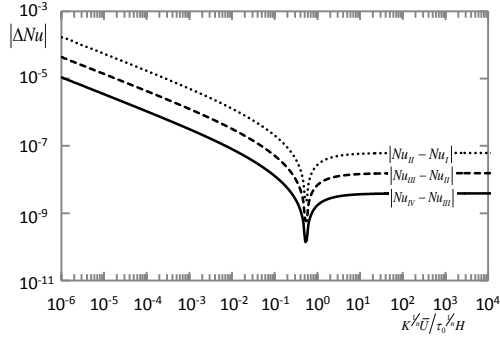


Figura C-3 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$.

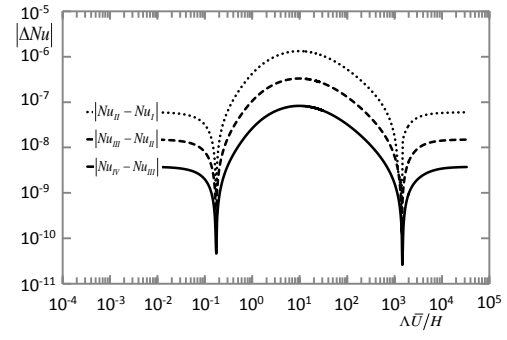


Figura C-6 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U} / H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_{\infty}/\mu_0=0,08$.

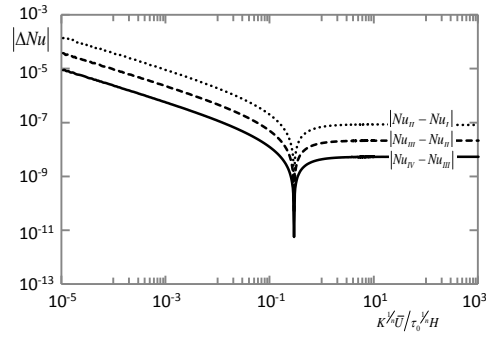


Figura C-4 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$.

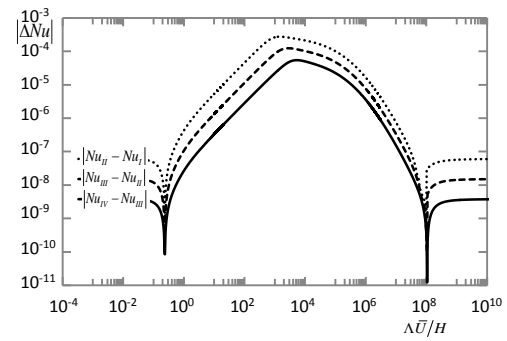


Figura C-7 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U} / H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_{\infty}/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$.

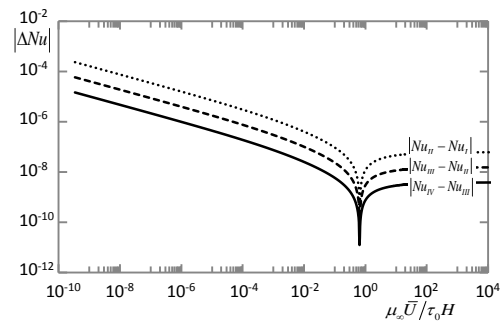


Figura C-5 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\mu_{\infty} \bar{U} / \tau_0 H$ para o fluido Casson.

Conforme se pode verificar através da análise das diversas figuras, o erro inerente a Nu_{IV} , inferior na maioria dos casos a 10^{-5} , é suficientemente reduzido para que estes valores de Nusselt se possam usar como referência.

Anexo D: Avaliação dos resultados numéricos do número de Nusselt para temperatura constante na parede

Da mesma forma que para o caso do fluxo de calor constante na parede, a integração numérica foi realizada utilizando o método das diferenças finitas com malhas sucessivamente mais refinadas. Assim, no primeiro caso utilizaram-se 3000 pontos ao longo de H , meia distância entre as placas, obtendo-se o número de Nusselt designando por Nu_I , em seguida realizaram-se integrações com 6000, 12000 e 24000 pontos ao longo de H , originando os números de Nusselt Nu_{II} , Nu_{III} e Nu_{IV} , respectivamente. As diferenças nos valores de Nusselt obtidos, $|Nu_{II}-Nu_I|$, $|Nu_{III}-Nu_{II}|$ e $|Nu_{IV}-Nu_{III}|$, serão representadas graficamente para cada fluido. De referir que as integrações numéricas foram feitas para cerca de 1500 valores distintos de número de Nusselt, variando os parâmetros adimensionais relevantes entre 10^{-10} a 10^{10} . As figuras seguintes apresentam a variação das diferenças nos valores de Nusselt obtidos numericamente em função do grupo adimensional correspondente de cada fluido.

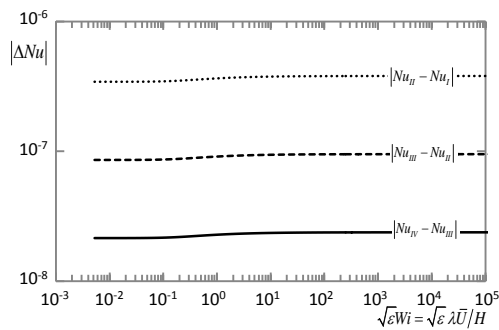


Figura D-1 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\sqrt{\varepsilon} \lambda \bar{U} / H$ para o fluido sPTT.

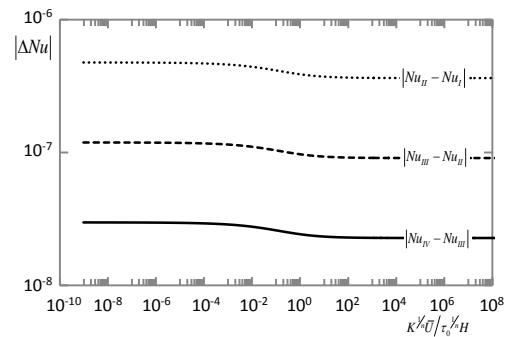


Figura D-2 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=0,5$.

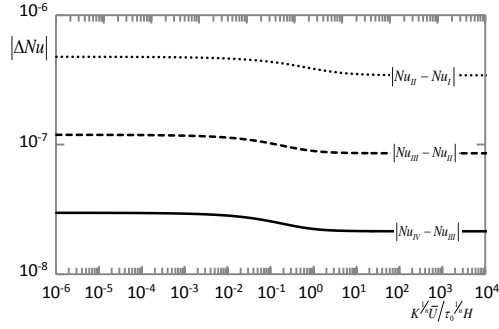


Figura D-3 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1$.

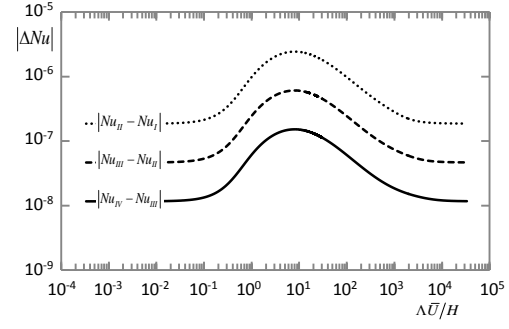


Figura D-6 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U} / H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,2$, $a=1,5$, $\mu_\infty/\mu_0=0,08$.

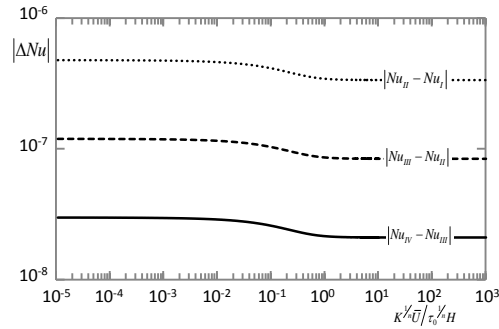


Figura D-4 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $K^{1/n} \bar{U} / \tau_0^{1/n} H$ para o fluido Herschel-Bulkley, $n=1,5$.

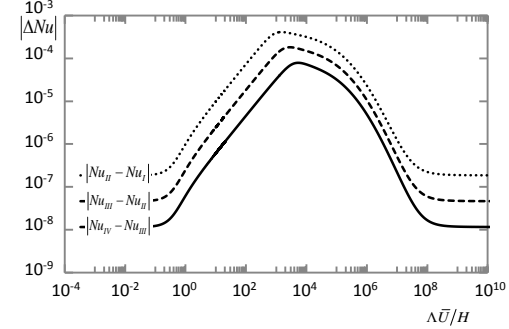


Figura D-7 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\Lambda \bar{U} / H$ para o fluido Carreau-Yasuda $n=0,358$, $a=2$, $\mu_\infty/\mu_0=1,08 \times 10^{-4}$.

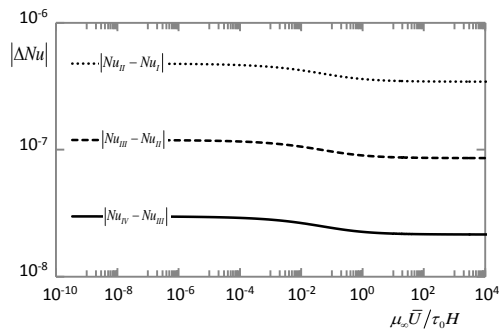


Figura D-5 - Diferença entre os valores de Nu em função do grupo adimensional $\mu_\infty \bar{U} / \tau_0 H$ para o fluido Casson.

Conforme se pode verificar através da análise das diversas figuras, da mesma forma que para fluxo de calor constante, o erro inerente a Nu_{IV} , inferior na maioria dos casos a 10^{-7} , é suficientemente reduzido para que estes valores de Nusselt se possam usar como referência.